等角共轭与密克点

垂足圆、判定及一道相似证明

LeyuDame

2026 年 10 月 30 日

高中数学竞赛几何专题讲义

本讲义先介绍等角线的垂足圆性质及其四边形形式，再讨论密克点与等角共轭点之间的相似关系。符号 $\overset{+}{\sim}$ 表示正相似，即保持方向的相似变换。

1 两条直线上的四垂足圆

命题 1.1 (等角线的四垂足圆)**.** 两条相交直线交于 S，SP, SQ 关于这两条直线所成角的角平分线等角（互为等角线）。分别从 P, Q 向两条直线作垂线，垂足依次为 A, C 与 B, D，其中 A, B 同在第一条直线上，C, D 同在第二条直线上。则 A, B, C, D 共圆，且圆心为 PQ 的中点 M。

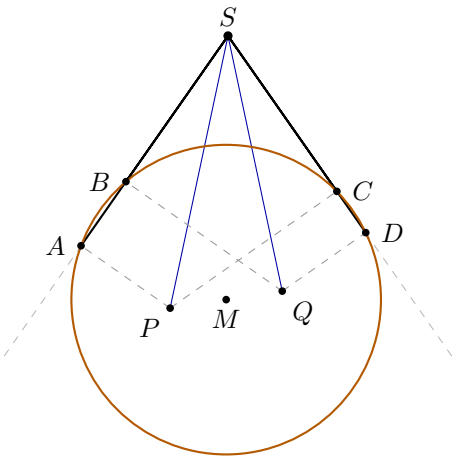


图 1: 两条相交直线上的四个垂足：A, B, C, D 共圆，圆心是 PQ 的中点 M。

证明. 记 $\angle ASP = \angle QSD = \alpha$，$\angle PSC = \angle BSQ = \beta$。由直角三角形投影得到

$$SA = SP\cos\alpha, \quad SC = SP\cos\beta, \quad SD = SQ\cos\alpha, \quad SB = SQ\cos\beta.$$

因而 $SA\cdot SB = SC\cdot SD$，由割线定理的逆命题知 A, B, C, D 共圆。再设 M 为 PQ 的中点；由于 A, B 分别是 P, Q 在同一直线上的垂足，PQ 中点的正交投影恰为 AB 的中点。因此 M 在弦 AB 的垂直平分线上；同理 M 在弦 CD 的垂直平分线上，于是 M 是该圆的圆心。 □

命题 1.2 (多边形的垂足圆)**.** 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 为多边形，P, Q 关于每个顶点的两条边所成的角均为一对等角共轭点。P_i, Q_i 分别为 P, Q 到边 A_iA_{i+1} 所在直线的垂足（指标按模 n 计算）。那么这 $2n$ 个垂

足位于同一个圆上，圆心为 PQ 的中点 M；即

$$MP_1 = MQ_1 = MP_2 = MQ_2 = \cdots = MP_n = MQ_n.$$

说明. 每相邻两边可使用上一个命题，得到这两边上的四个垂足同到固定点 M 等距；沿多边形各顶点逐次应用即可。此结论的前提是**存在**同时满足所有顶点等角关系的 P, Q，并非任意两点均可。下图以 $n = 4$ 示意。

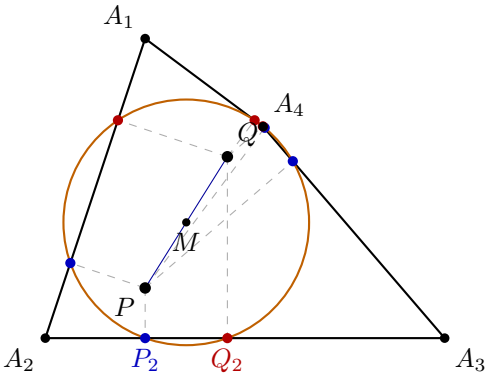


图 2: 多边形垂足圆的四边形示例（$n = 4$）：蓝点为 P_i，红点为 Q_i，八点共圆。

2　四边形中的判定

命题 2.1 (垂足共圆判定)**.** 设 $ABCD$ 是凸四边形，P 在其内部。由 P 向直线 AB, BC, CD, DA 作垂足 E, F, G, H，则

$$E, F, G, H \text{ 共圆} \quad \Longleftrightarrow \quad \angle BPC + \angle DPA = 180^\circ.$$

上述条件也可等价写为

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ.$$

在所讨论的四边形等角共轭构型中，P 存在等角共轭点时满足此条件。

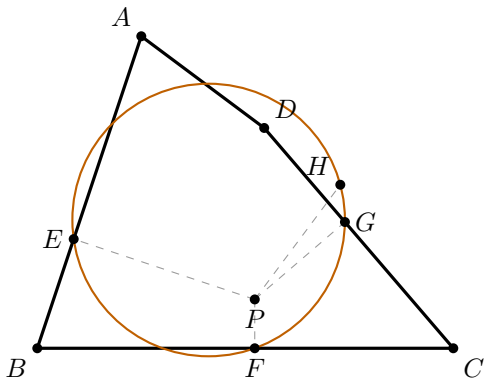


图 3: 四边形 $ABCD$ 的垂足四边形 $EFGH$；等角共轭点存在时，四垂足共圆。

证明. 因为 $\angle PEB = \angle PFB = 90^\circ$，所以 B, E, P, F 共圆。同理，C, F, P, G、D, G, P, H、A, H, P, E 分别共圆。因此

$$\angle EFG = \angle ABP + \angle PCD, \qquad \angle EHG = \angle BAP + \angle PDC.$$

两式相加，应用三角形内角和得

$$\angle EFG + \angle EHG = 2 \cdot 180^\circ - (\angle APB + \angle CPD).$$

四边形 $EFGH$ 共圆等价于一对对角互补，故等价于 $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$。再由 P 周围四角之和为 360°，得到 $\angle BPC + \angle DPA = 180^\circ$。 □

3 第 6 题：密克点与正相似

题目. 如图，四边形 $ABCD$ 中，S 为完全四边形 $ABCD$ 的密克点，即

$$\triangle SAB \overset{+}{\sim} \triangle SDC.$$

P, Q 为关于四边形 $ABCD$ 的一对等角共轭点。证明:

$$\triangle SAP \overset{+}{\sim} \triangle SQC.$$

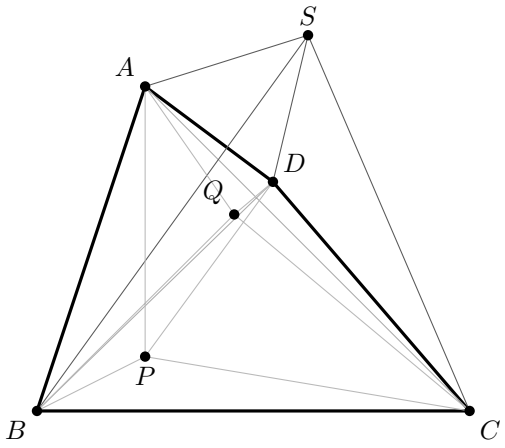


图 4: 第 6 题：密克点 S 与关于四边形的等角共轭点 P, Q。

证明

第一步：从等角共轭得到互补角。由前一节的判定,

$$\angle APB + \angle CPD = 180^\circ. \tag{1}$$

第二步：构造辅助点 X。取以 S 为中心、将 A 映到 D、B 映到 C 的正相似变换，并记 P 的像为 X。于是四点组依次对应

$$(S, A, B, P) \longmapsto (S, D, C, X).$$

特别地,

$$\triangle SPX \overset{+}{\sim} \triangle SAD, \qquad \angle DXC = \angle APB. \tag{2}$$

由式 (1) 知

$$\angle DXC + \angle DPC = 180^\circ,$$

所以 C, P, D, X 四点共圆。

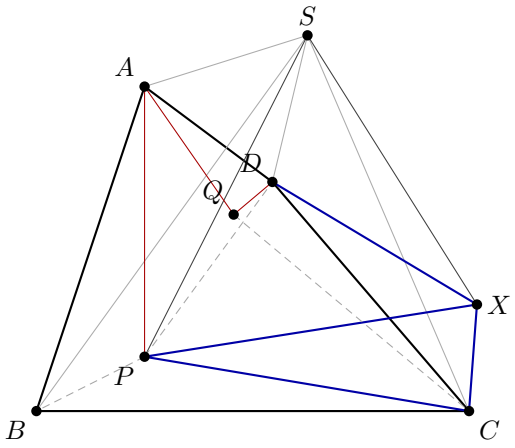


图 5: 辅助点 X 为 P 在正相似 $SAB \sim^{+} SDC$ 下的像；蓝色强调圆内接四边形 $CPDX$ 及相关边。

第三步：利用等角共轭得到第二组正相似。由 C, P, D, X 共圆及 P, Q 的等角关系，得

$$\angle CPX = \angle CDX = \angle BAP = \angle QAD,$$
$$\angle CXP = \angle CDP = \angle QDA.$$

故

$$\triangle CPX \overset{+}{\sim} \triangle QAD. \tag{3}$$

第四步：拼合相似关系。由式 (2)、(3) 中的对应边，

$$\frac{SP}{SA} = \frac{PX}{AD} = \frac{PC}{AQ}.$$

又由两组相似的对应角（按有向角理解），

$$\angle SPC = \angle SPX + \angle XPC = \angle SAD + \angle DAQ = \angle SAQ.$$

因此 $\triangle SPC \overset{+}{\sim} \triangle SAQ$，并特别得到

$$\frac{SP}{SA} = \frac{SC}{SQ}, \qquad \angle PSC = \angle ASQ.$$

前一式等价于 $SA/SQ = SP/SC$；后一式等价于 $\angle ASP = \angle QSC$（按有向角取等角）。于是由夹角及邻边成比例可知

$$\triangle SAP \overset{+}{\sim} \triangle SQC. \qquad \square$$