例 6　49 个学生解 3 个问题，每个题的得分是 0 到 7 分的整数。求证：存在两个学生 A 和 B，对每个问题，A 的得分不小于 B。（第 29 届 IMO 预选题）

证明　若有两个学生的第 1、2 题的得分相同，设其中学生 A 的第 3 题的得分不低于另一名学生 B，于是，对每一个问题，A 的得分不低于 B，结论成立。

下设任意两名学生第 1、2 题的得分至少有一个不相同，将每个学生用平面内的一个整点 (i,j) 表示，其中 i,j 分别表示该学生在第 1、2 题的得分（$0\leqslant i,j\leqslant 7$）。于是 49 个学生对应的整点互不相同。记

$$\begin{aligned}
M_1&=\{(i,j)\mid i,j\text{为整数},0\leqslant i\leqslant 7,\ j=0\text{或}i=7,\ 1\leqslant j\leqslant 7\};\\
M_2&=\{(i,j)\mid i,j\text{为整数},0\leqslant i\leqslant 6,\ j=1\text{或}i=6,\ 2\leqslant j\leqslant 7\};\\
M_3&=\{(i,j)\mid i,j\text{为整数},0\leqslant i\leqslant 5,\ j=2\text{或}i=5,\ 3\leqslant j\leqslant 7\};\\
M_4&=\{(i,j)\mid i,j\text{为整数},0\leqslant i\leqslant 4,\ j=3\text{或}i=4,\ 4\leqslant j\leqslant 7\};\\
M_5&=\{(i,j)\mid i,j\text{为整数},i=2,3,\ 4\leqslant j\leqslant 7\};\\
M_6&=\{(i,j)\mid i,j\text{为整数},i=0,1,\ 4\leqslant j\leqslant 7\}.
\end{aligned}$$

因为 49 个学生对应的 49 个不同的整点属于上述 6 个集合，故由抽屉原理知至少有 $\left[\dfrac{49-1}{6}\right]+1=9$ 个整点属于同一个集合，由于 $|M_5|=|M_6|=8$，故这个集合只能是前 4 个集合中的一个，记这个集合为 M。这 9 个整点对应的 9 个学生的第 3 题得分只有 $0,1,2,\cdots,7$ 这 8 种可能，再由抽屉原理知其中必有两个学生的第 3 题得分相同，于是，由 M_1、M_2、M_3、M_4 的构造知，这两个学生中必有一个学生（记为 A），他的第 1、2 题的得分都不低于另一个学生（记为 B），故对每一个问题 A 的得分不低于 B，结论得证。

注　（1）本题中若将 49 个学生改为 48 个学生，则不保证原题结论成立。我们用 (a,b,c) 表示一个学生第 1、2、3 题的得分分别为 a,b,c，假设 48 个学生的得分如下：

$$\begin{gathered}
(3,7,0),\ (4,6,0),\ (5,5,0),\ (6,4,0),\ (7,3,0);\\
(2,7,1),\ (3,6,1),\ (4,5,1),\ (5,4,1),\ (6,3,1),\ (7,2,1);\\
(1,7,2),\ (2,6,2),\ (3,5,2),\ (4,4,2),\ (5,3,2),\ (6,2,2),\ (7,1,2);\\
(0,7,3),\ (1,6,3),\ (2,5,3),\ (3,4,3),\ (4,3,3),\ (5,2,3),\ (6,1,3),\ (7,0,3);\\
(0,6,4),\ (1,5,4),\ (2,4,4),\ (3,3,4),\ (4,2,4),\ (5,1,4),\ (6,0,4);\\
(0,5,5),\ (1,4,5),\ (2,3,5),\ (3,2,5),\ (4,1,5),\ (5,0,5);\\
(0,4,6),\ (1,3,6),\ (2,2,6),\ (3,1,6),\ (4,0,6);\\
(0,3,7),\ (1,2,7),\ (2,1,7),\ (3,0,7).
\end{gathered}$$

则其中不存在两名学生 A 和 B 使得对每一个问题 A 的得分却不低于 B。

（2）例 6 及注（1）中结论可等价地写成下列形式：设 D 为 $2^7\cdot 3^7\cdot 5^7$ 的所有不同正因数组成的集合，$S\subseteq D$，且 S 内存在两个数 A 和 B 使得 B 整除 A，那么 S 内所含元素个数的最小值等于 49。

上述问题的一个自然推广是下列问题：

问题 1　设 n 为正整数，D_n 为 $2^n3^n5^n$ 的所有不同正因数组成的集合，$S\subseteq D_n$，且 S 中任意一数不整除 S 中另一数。求 $|S|$ 的最大值。（2004 年中国国家队培训题第 30 题）

问题 1 的答数为 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$。换言之，如果 S 中存在 2 个数 A 和 B，使得 B 整除 A，那么 $|S|$ 的最小值为 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]+1$，我们将这一结论的证明留给读者作为练习题。

问题 1 还可推广为下列形式。

问题 2 设 m,n,p 是给定的正整数，且 $m\leqslant n\leqslant p\leqslant m+n$。求下列结论恒成立时，$q=f(m,n,p)$ 的最小值：若 q 名学生都参加了三次数学竞赛的模拟考试，且第一次考试每名学生的得分都是从 0 到 m 的整数，第二次考试每名学生的得分都是从 0 到 n 的整数，第三次考试每名学生的得分都是从 0 到 p 的整数，那么，其中必有两名学生 A、B 使得对每一次考试 A 的得分都不低于 B 的得分。

问题 2 的答数为

$$q_0=(m+1)(n+1)-\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right]\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right]+1.$$

我们将这一结论的证明留给有兴趣的读者去探索或者从下列文章中找到：

张垚：《一个组合最值问题的来源和推广》，中等数学 2010 年第 2 期。

2010 年第 2 期　　中等数学　　问题赏析

一个组合最值问题的来源和推广

张　垚

（湖南师范大学数学与计算机科学学院，410081）

中图分类号：O157　文献标识码：A　文章编号：1005-6416(2010)02-0013-02

问题 1　设 n 为正整数，D_n 为 $2^n3^n5^n$ 的所有正因数所成的集合，$S\subseteq D_n$，且 S 中任一数都不能整除 S 中另一数。求 $|S|$ 的最大值。[1]

（2004，IMO 中国国家队培训题）

本题的答案为 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$，其中，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。

问题 1 可等价地描述为下列形式。

问题 2　设 n 为正整数。求下列结论恒成立时，$q=f(n)$ 的最小值：如果 q 名学生都参加了三次数学竞赛的模拟考试，并且每一次考试每人的得分都是从 0 到 n 的整数，那么，其中必有两名学生 A、B，使得对每一次考试 A 的得分都不低于 B 的得分。

问题 2 的答案为 $\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]+1$，且证明方法同问题 1。

因此，问题 1、2 可看成是由下列问题 3 演变而来的。

问题 3　49 名学生解三个问题，每个问题的得分都是从 0 到 7 的整数。证明：其中必有两名学生 A、B，使得对每一个问题 A 的得分都不低于 B 的得分。[2]

（第 29 届 IMO 备选题）

显然，这几个问题还可以作如下推广。

问题 4　设 m、n、p 是给定的正整数，且 $m\leqslant n\leqslant p\leqslant m+n$。求下列结论恒成立时，$q=f(m,n,p)$ 的最小值：若 q 名学生都参加了三次数学竞赛的模拟考试，且第一次考试每名学生的得分都是从 0 到 m 的整数，第二次考试每名学生的得分都是从 0 到 n 的整数，第三次考试每名学生的得分都是从 0 到 p 的整数，那么，其中必有两名学生 A、B，使得对每一次考试 A 的得分都不低于 B 的得分。

问题 4 的解　所求 q 的最小值为

$$q_0=(m+1)(n+1)-\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right]\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right]+1.$$

首先证明：当 $q=q_0-1$ 时，不保证存在两名学生满足题目的要求。

记

$$S=\{(a,b,c)\mid a,b,c\in\mathbb{N},\ 0\leqslant a\leqslant m,\ 0\leqslant b\leqslant n,\ 0\leqslant c\leqslant p\},$$

其中，(a,b,c) 表示学生第一、二、三次考试的得分分别为 a、b、c，并记

$$t_0=\left[\frac{m+p-n}{2}\right],\qquad t_1=\left[\frac{m+p-n+1}{2}\right].$$

则 $t_0+t_1=m+p-n$（无论 r 是偶数还是奇数，都有 $\left[\dfrac{r}{2}\right]+\left[\dfrac{r+1}{2}\right]=r$），且

$$m-t_0=t_1-p+n=\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right],$$

$$m-t_1=t_0-p+n=\left[\frac{m+n-p}{2}\right].$$

设部分学生三次考试的得分组成的集合 M 为下列 $p+1$ 个不相交的集合的并集：

$$S_i=\{(a,b,c)\mid (a,b,c)\in S,\ a+b=n+t_0-i,\ c=i\}\quad (i=0,1,\cdots,p).$$

由

$$|S_i|=\begin{cases} m-t_0+i+1, & 0\leqslant i\leqslant t_0-1;\\ m+1, & t_0\leqslant i\leqslant t_0+n-m;\\ n+t_0-i+1, & t_0+n-m+1\leqslant i\leqslant p,\end{cases}$$

有

$$\begin{aligned}|M|&=\left|\bigcup_{i=0}^{p}S_i\right|=\sum_{i=0}^{p}|S_i|\\ &=\sum_{i=1}^{m}i-\sum_{i=1}^{m-t_0}i+(n-m+1)(m+1)+\sum_{i=1}^{m}i-\sum_{i=1}^{n+t_0-p}i\\ &=2\sum_{i=1}^{m}i+(n-m+1)(m+1)-\sum_{i=1}^{m-t_0}i-\sum_{i=1}^{m-t_1}i\\ &=(n+1)(m+1)-\frac{1}{2}\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right]\left[\frac{m+n-p+3}{2}\right]\\ &\quad-\frac{1}{2}\left[\frac{m+n-p}{2}\right]\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right]\\ &=(m+1)(n+1)-\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right]\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right],\end{aligned}$$

即 M 恰为 q_0-1 名不同学生的得分组成的集合。只须证明其中不存在两名学生的得分满足题目的要求。否则，若两名学生 A、B 得分分别为 (a_1,b_1,c_1)、(a_2,b_2,c_2)，满足 $a_1\leqslant a_2$、$b_1\leqslant b_2$、$c_1\leqslant c_2$。但由 $a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=n+t_0$ 知，$a_1=a_2$、$b_1=b_2$、$c_1=c_2$，矛盾（如果 $q<q_0-1$，则取上述集合 M 的一个 q 元子集代替 M 即可得到同样的结论）。

故所求 q 的最小值大于或等于 q_0。

其次证明：任意 q_0 名学生中必有两名学生 A、B 满足对每次考试 A 的得分都不低于 B 的得分。

显然，若有两名学生 A、B 的前两次考试的得分完全相同，则结论成立。下设没有两名学生的前两次考试的得分完全相同。

将每名学生对应到平面直角坐标系中的一个点 (a,b)，其中，a、b 分别是该生第一次、第二次考试的得分。于是，q_0 名学生对应了 q_0 个不同的点，它们都属于

$$T=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{N},\ 0\leqslant a\leqslant m,\ 0\leqslant b\leqslant n\}.$$

将 T 分为下列 $s+1$ $\left(s=\left[\dfrac{m+n-p+1}{2}\right]\right)$ 个两两不相交的子集的并集：

$$\begin{aligned}T_i=\{(a,b)\mid (a,b)\in T,\ &0\leqslant a\leqslant m-i+1,\\ &b=i-1\text{或}a=m-i+1,\ i\leqslant b\leqslant n\}\\ &(i=1,2,\cdots,s),\\ T_{s+1}&=T\setminus R\\ =\{(a,b)\mid (a,b)\in T,\ &0\leqslant a\leqslant m-s,\ s\leqslant b\leqslant n\},\end{aligned}$$

其中，$R=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_s$。于是，

$$|T_{s+1}|=(m+1-s)(n+1-s).$$

故 q_0 名学生对应的点中至少有

$$q_0-(m+1-s)(n+1-s)$$

个点属于 $R=T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_s$。

由抽屉原理知，其中至少有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{q_0-(m+1-s)(n+1-s)-1}{s}\right]+1\\&=-\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right]+(m+n+2)-s+1\\&=-\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right]+(m+n+2)-\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right]+1\\&=p+2\end{aligned}$$

名学生对应的点同属于 T_1、T_2、$\cdots$、T_s 中某个子集 T_i。而这 $p+2$ 名学生第三次考试的得分至多只有 $0,1,\cdots,p$ 这 $p+1$ 种不同的分数，故其中必有两名学生的第三次考试的得分相同，并且由子集 T_i 的构造知，这两名学生中必有一名学生（记为 A）其第一、二次考试的得分都不低于另一学生（记为 B）。于是，对每次考试 A 的得分都不低于 B 的得分。

综上，所求 q 的最小值为

$$q_0=(m+1)(n+1)-\left[\frac{m+n-p+1}{2}\right]\left[\frac{m+n-p+2}{2}\right]+1.$$

【注】 特别地，当 $m=p=n$ 时，可得问题 2 的结论：q 的最小值为

$$\begin{aligned}q_0&=(n+1)^2-\left[\frac{n+1}{2}\right]\left[\frac{n+2}{2}\right]+1\\&=\left[\frac{3(n+1)^2+1}{4}\right]+1.\end{aligned}$$

再令 $n=7$，得 $q_0=49$。这不仅得到问题 3 的结论，而且表明问题 3 中 49 是使结论成立的最小正整数。

参考文献：

[1] 2004 年 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO 数学奥林匹克试题集锦 (2004) [M]. 上海：华东师范大学出版社，2004，9.

[2] 张垚，冷岗松，沈文选. 奥林匹克数学中的组合问题 [M]. 长沙：湖南师范大学出版社，2006，2.