数学试题及解析（个人命题部分）

1. 某沿海城市博物馆文创店统计了连续 5 天的日参观人次 x（单位：百人次）与文创产品日销售额 y（单位：百元），数据如下：

x	2	3	4	5	6
y	3.5	5.65	7.8	9.95	12.1

已知 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，且 $\hat{b}=2.15$．据此预测当参观人次为 700 人次时，该店文创产品日销售额约为（　　）

A. 1380 元　　B. 1425 元　　C. 1450 元　　D. 1475 元

解析：$\bar{x}=\dfrac{2+3+4+5+6}{5}=4$，$\bar{y}=\dfrac{3.5+5.65+7.8+9.95+12.1}{5}=7.8$，回归直线过样本中心 $(\bar{x},\bar{y})$，所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=7.8-2.15\times4=-0.8$，即 $\hat{y}=2.15x-0.8$．当 $x=7$ 时，$\hat{y}=2.15\times7-0.8=14.25$（百元），即约为 1425 元．答案：B

出处：改编 2025 年广东省江门市高二下学期调研测试（二）第 6 题。

5. 已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的弦 AB 的中点横坐标为 5，则 $|AB|$ 的最大值为（　　）

A. 10　　B. 12　　C. 14　　D. 16

解析：抛物线 C 的焦点为 $F(2,0)$，准线为 $x=-2$．设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=10$．由抛物线定义，$|AF|=x_1+2$，$|BF|=x_2+2$，所以

$$|AB|\leqslant|AF|+|BF|=x_1+x_2+4=14,$$

当且仅当弦 AB 过焦点 F 时取等号.设过 F 的直线 $y=k(x-2)$,与 $y^2=8x$ 联立得 $k^2x^2-(4k^2+8)x+4k^2=0$,由 $x_1+x_2=4+\dfrac{8}{k^2}=10$ 得 $k^2=\dfrac{4}{3}$，满足条件的弦存在．所以 $|AB|$ 的最大值为 14．答案：C

出处：改编 2025 年广东省大湾区普通高中毕业年级联合模拟考试（一）第 8 题。

6. 设函数 $f(x)=(x-m)\ln(x+1)$（$m>1$），点 $M(m,0)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上．过点 M 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l，若 l 与曲线 $y=\ln x$ 恰有两个交点，且这两个交点关于点 M 对称，则 m^2 的值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. e　　D. 4

解析：$f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x-m}{x+1}$．设切点横坐标为 x_0，由切线过 $M(m,0)$ 得 $-f(x_0)=f'(x_0)(m-x_0)$，化简得 $\dfrac{(x_0-m)^2}{x_0+1}=0$，所以 $x_0=m$，切线 $l:y=\ln(m+1)\cdot(x-m)$.

设两交点为 $A(x_1,\ln x_1)$，$B(x_2,\ln x_2)$（$x_1<x_2$），由 A,B 关于 M 对称得 $x_1+x_2=2m$，$\ln x_1+\ln x_2=0$，即 $x_1x_2=1$．令 $x_2=m+d$，则 $x_1=m-d$，$m^2-d^2=1$（$d>0$）.

由 B 在 l 上得 $\ln(m+d)=d\ln(m+1)$，即 $H(d)=H(1)$，其中 $H(u)=\dfrac{\ln(m+u)}{u}$（$u>0$）．因为 $H'(u)=\dfrac{\frac{u}{m+u}-\ln(m+u)}{u^2}$，且 $m+u>1$ 时 $\ln(m+u)>1-\dfrac{1}{m+u}=\dfrac{m+u-1}{m+u}>\dfrac{u}{m+u}$，所以 $H(u)$ 单调递减，故 $d=1$，$m^2=d^2+1=2$．此时由对称性 A 也在 l 上，且直线与上凸曲线 $y=\ln x$ 至多两个交点，符合题意．答案：B

出处：改编 2025 年广东省六校联盟 2026 届高三第二次联考第 8 题。

9. 设复数 $z_1=a+3\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$（$a\in\mathrm{R}$，i 为虚数单位），则下列说法正确的是（　　）

A. 若 z_1+z_2 为纯虚数，则 $a=-2$　　B. 若 $z_1\overline{z_2}$ 为实数，则 $a=6$

C. 若 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，则 $a=\dfrac{3}{2}$　　D. 若 $|z_1|=5$，则 $a=\pm4$

解析：

选项 A：$z_1+z_2=(a+2)+2\mathrm{i}$，为纯虚数则 $a+2=0$，$a=-2$．选项 A 正确.

选项 B：$z_1\overline{z_2}=(a+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=(2a-3)+(a+6)\mathrm{i}$，为实数则 $a+6=0$，$a=-6$．选项 B 错误.

选项 C：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(a+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=\dfrac{(2a-3)+(a+6)\mathrm{i}}{5}$，为纯虚数则 $2a-3=0$ 且 $a+6\neq0$，$a=\dfrac{3}{2}$．选项 C 正确.

选项 D：$|z_1|=\sqrt{a^2+9}=5$，则 $a^2=16$，$a=\pm4$．选项 D 正确．答案：ACD

出处：改编 2026 年广东省江门市恩平黄冈实验中学等校高一下学期期中考试第 9 题。

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，且 $2S_n=a_{n+1}-1$（$n\in\mathrm{N}^*$）．数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1=3^n-n$（$n\in\mathrm{N}^*$）．记 $T_n=a_nb_n$，则 $T_1+T_2+\cdots+T_8=$_____.

解析：由 $2S_n=a_{n+1}-1$，$a_1=1$ 得 $a_2=3$；当 $n\geqslant2$ 时，$2S_{n-1}=a_n-1$，两式相减得 $a_{n+1}=3a_n$，又 $a_2=3a_1$，所以 $a_n=3^{n-1}$.

记 $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1=b_n+3b_{n-1}+\cdots+3^{n-1}b_1=3^n-n$，则 $c_{n+1}=b_{n+1}+3c_n$，所以 $b_{n+1}=c_{n+1}-3c_n=3^{n+1}-(n+1)-3(3^n-n)=2n-1$，即 $n\geqslant2$ 时 $b_n=2n-3$；又 $b_1=c_1=2$.

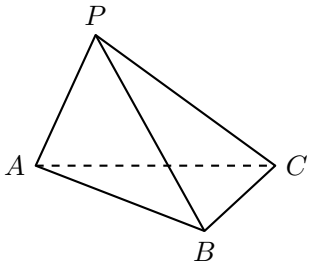
所以 $T_1=2$，$n\geqslant2$ 时 $T_n=(2n-3)\cdot3^{n-1}$，$T_2,T_3,\cdots,T_8$ 依次为 $3,27,135,567,2187,8019,28431$，故 $T_1+T_2+\cdots+T_8=39371$．答案：39371

出处：改编 2025 年广东省惠州市“六校联盟”高三第三次联考（期中）第 14 题。

15. （13 分） 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，$AP\perp CP$，$AB\perp BC$，且 $AC=2AP=2BC=4$.

（1）求 PB 的长；

（2）求二面角 $P-AB-C$ 的余弦值.



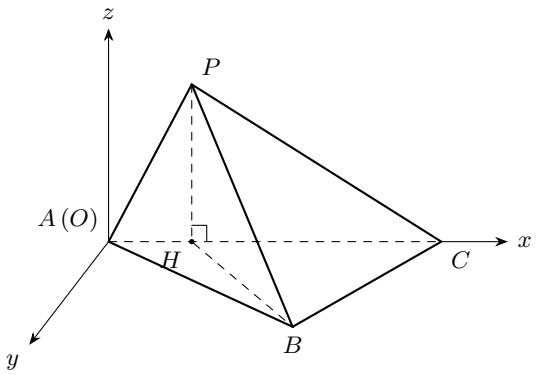
解析：（1）在平面 PAC 内过 P 作 $PH\perp AC$，垂足为 H．因为平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，所以 $PH\perp$ 平面 ABC.　　……1 分

在 Rt$\triangle APC$ 中，$AP=2$，$AC=4$，所以 $\angle PAC=60^\circ$，$AH=1$，$PH=\sqrt{3}$.　　……2 分

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=4$，所以 $\angle BAC=30^\circ$，$AB=2\sqrt{3}$.　　……3 分

以 A 为原点，AC 所在直线为 x 轴，在平面 ABC 内过 A 作 AC 的垂线为 y 轴，过 A 且与 HP 同向的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(3,\sqrt{3},0)$，$C(4,0,0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$.　　……4 分

所以 $PB=\sqrt{(3-1)^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{10}$. ……5 分



第 15 题解析图：垂足 H 与空间直角坐标系

(2) 平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. ……6 分

$\overrightarrow{AP}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AB}=(3,\sqrt{3},0)$. 设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=x+\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=3x+\sqrt{3}y=0,\end{cases}$$ ……7 分

取 $x=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-3,-1)$. ……9 分

所以 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. ……11 分

点 P 在平面 ABC 内的射影 $H(1,0,0)$ 在线段 AC 上, 与点 C 位于直线 AB 的同侧, 所以二面角 $P-AB-C$ 为锐角. ……12 分

故二面角 $P-AB-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$. ……13 分

出处：改编 2025 年广东省衡水金卷 2026 届高三 10 月联考第 15 题。

19. （17 分） 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 与抛物线 $E:y^2=4m(x-7)$，其中 $m>0$. 对于 C 上的无穷点列 $P_0,P_1,P_2,\cdots$，若对任意 $n\in\mathrm{N}$ 都有：① $P_n\neq P_{n+1}$，且 $P_{n+2}\neq P_n$；② 直线 P_nP_{n+1} 与 E 相切，则称点列 $\{P_n\}$ 为“C 关于 E 的切弦链”. 记 $P_n(t_n^2,2t_n)$.

(1) 若 $m=4$，$P_0(1,2)$，$P_1(4,4)$，求 P_2,P_3 的坐标，并求 P_{2026} 的坐标;

(2) 证明：当 $n\geqslant 1$ 时，$t_{n+1}+t_{n-1}=\left(\dfrac{4}{m}-2\right)t_n$;

(3) 若切弦链 $\{P_n\}$ 满足：对任意 $n\in\mathrm{N}$，$P_{n+6}=P_n$，求 m 的所有可能值.

解析：对 C 上两点 $(t^2,2t)$，$(s^2,2s)$（$t\neq s$），过这两点的直线方程为 $2x-(t+s)y+2ts=0$.

(1) $m=4$ 时，$E:y^2=16(x-7)$. 设 $P_2(s^2,2s)$，直线 $P_1P_2:2x-(2+s)y+4s=0$，代入 E 得 $y^2-8(s+2)y+32s+112=0$. ……1 分

由相切得 $\dfrac{\Delta}{4}=16(s+2)^2-(32s+112)=16(s-1)(s+3)=0$，$s=1$ 或 $s=-3$. 因为 $P_2\neq P_0$，所以 $s=-3$，$P_2(9,-6)$. ……2 分

同理,设 $P_3(s^2,2s)$,由直线 P_2P_3 与 E 相切得 $16(s-1)(s-2)=0$,又 $P_3\neq P_1$,所以 $s=1$,$P_3(1,2)=P_0$.……3 分

同理 $P_4=P_1$，依次可得 $P_{n+3}=P_n$. 因为 $2026=3\times 675+1$，所以 $P_{2026}=P_1$，坐标为 $(4,4)$. ……4 分

(2) 将 $x=\dfrac{(t+s)y-2ts}{2}$ 代入 $y^2=4m(x-7)$，得 $y^2-2m(t+s)y+4m(ts+7)=0$. ……5 分

直线与 E 相切 $\Leftrightarrow\Delta=0\Leftrightarrow m(t+s)^2=4(ts+7)$. ……6 分

当 $n\geqslant 1$ 时，取 $t=t_n$，则 $s=t_{n-1}$ 与 $s=t_{n+1}$ 都满足关于 s 的方程

$$ms^2+(2m-4)t_ns+mt_n^2-28=0.$$ ……8 分

又 $P_{n+1}\neq P_{n-1}$，即 $t_{n+1}\neq t_{n-1}$，所以 t_{n-1},t_{n+1} 是该方程的两个根，由韦达定理得

$$t_{n+1}+t_{n-1}=-\frac{(2m-4)t_n}{m}=\left(\frac{4}{m}-2\right)t_n.$$ ……10 分

(3) 记 $k=\dfrac{4}{m}-2$，则 $k>-2$，且 $t_{n+1}+t_{n-1}=kt_n$（$n\geqslant 1$）. 于是

$$t_{n+2}+t_{n-2}=k(t_{n+1}+t_{n-1})-2t_n=(k^2-2)t_n,$$

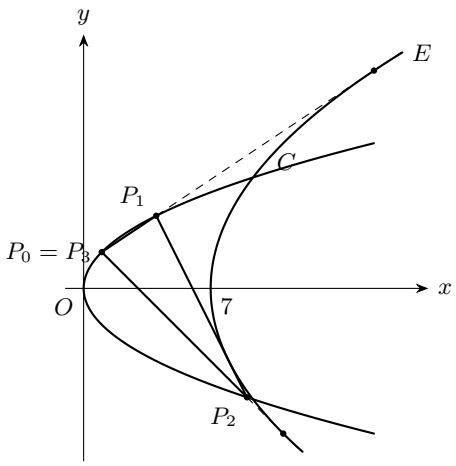
$$t_{n+3}+t_{n-3}=k(t_{n+2}+t_{n-2})-(t_{n+1}+t_{n-1})=(k^3-3k)t_n\ (n\geqslant 3).$$ ……12 分

由 $P_{n+6}=P_n$ 得 $t_{n+6}=t_n$，所以 $t_{n-3}=t_{n+3}$，从而 $2t_{n+3}=(k^3-3k)t_n$. 记 $c=\dfrac{k^3-3k}{2}$，则 $t_{n+3}=ct_n$，$t_n=t_{n+6}=c^2t_n\,(n\geqslant 3)$. 因为 $t_n\neq t_{n+1},t_n,t_{n+1}$ 不全为 0，所以 $c^2=1$，即 $k^3-3k=\pm 2$，得 $(k-2)(k+1)^2=0$ 或 $(k+2)(k-1)^2=0$. ……14 分

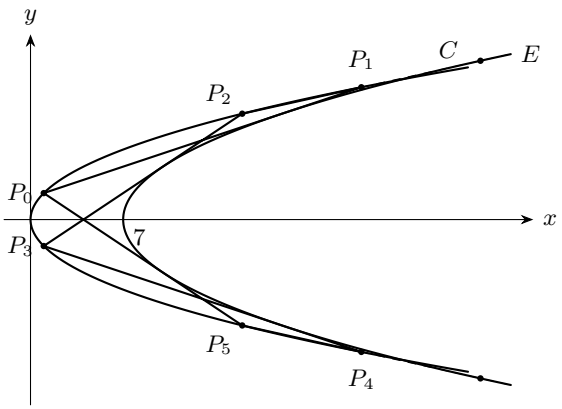
又 $k>-2$，所以 $k\in\{2,1,-1\}$. 若 $k=2$，则 $t_{n+1}-t_n=t_n-t_{n-1}$，$\{t_n\}$ 为等差数列，由 $t_{n+6}=t_n$ 知公差为 0，与 $t_n\neq t_{n+1}$ 矛盾，舍去. ……15 分

若 $k=-1$，即 $m=4$，由（1）知存在切弦链满足 $P_{n+3}=P_n$，从而 $P_{n+6}=P_n$. ……16 分

若 $k=1$，即 $m=\dfrac{4}{3}$，取 t_n 依次循环为 $1,5,4,-1,-5,-4$，可验证相邻两项均满足 $m(t+s)^2=4(ts+7)$，且 $t_n\neq t_{n+1}$，$t_{n+2}\neq t_n$，满足题意. 综上，$m=4$ 或 $m=\dfrac{4}{3}$. ……17 分



(a) $m=4$：三周期切弦链



(b) $m=\dfrac{4}{3}$：六周期切弦链

出处：原创。