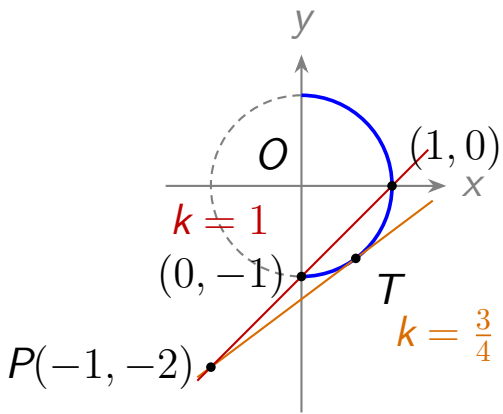
第 7 题

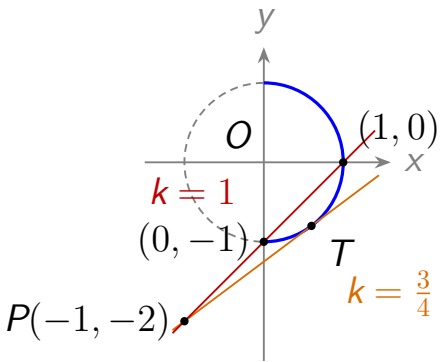
已知曲线 C 的方程为 $x=\sqrt{1-y^2}$，直线 l 过点 $(-1,-2)$，且斜率为 k. 若直线 l 与曲线 C 恰有两个不同的公共点，则 k 的取值范围为（　　）

A. $\left(\frac{3}{4},1\right]$　　B. $\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$

C. $\left[\frac{3}{4},1\right]$　　D. $[3,+\infty)$



第 7 题：几何示意



蓝色曲线为右半圆.

$k = \frac{3}{4}$ 时相切，只有一个公共点.

$k = 1$ 时经过 $(0, -1)$、$(1, 0)$，有两个公共点.

第 7 题：参考答案与解析（1/3）

A

由 $x=\sqrt{1-y^2}$，得

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

故曲线 C 为单位圆的右半圆（含端点）.

由题意，直线 l 的方程为 $y+2=k(x+1)$，即 $y=kx+k-2$. 代入 $x^2+y^2=1$，整理得

$$(k^2+1)x^2+2k(k-2)x+(k-2)^2-1=0.$$

第 7 题：参考答案与解析（2/3）

由于直线上每个横坐标唯一确定一个点，直线 l 与曲线 C 恰有两个不同的公共点，等价于上述一元二次方程有两个不同的非负实根. 设两根为 x_1, x_2，则

$$\Delta = [2k(k-2)]^2 - 4(k^2+1)\left[(k-2)^2 - 1\right] = 4(4k-3),$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2k(2-k)}{k^2+1}, \qquad x_1 x_2 = \frac{(k-1)(k-3)}{k^2+1}.$$

由判别式及韦达定理，得

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4k - 3 > 0, \\ k(2-k) \geq 0, \\ (k-1)(k-3) \geq 0. \end{cases}$$

第 7 题：参考答案与解析（3/3）

解得 $\frac{3}{4} < k \leq 1$，故选 A.

当 $k = 1$ 时，直线经过 $(0, -1)$ 和 $(1, 0)$，两点均属于曲线 C，故右端点取到；当 $k = \frac{3}{4}$ 时，直线与圆相切，只有一个公共点，故左端点不取.

第 8 题

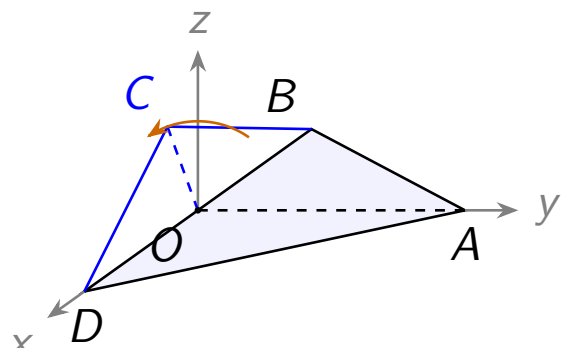
如图，四边形 $ABCD$ 中，$AB = BD = DA = 2\sqrt{3}$，$BC = CD = 2$. 将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，当二面角 A-BD-C 的值属于区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 时，直线 AB 与 CD 间的距离的最大值是（　）.

A. $\frac{6\sqrt{13}}{13}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{6\sqrt{183}}{61}$

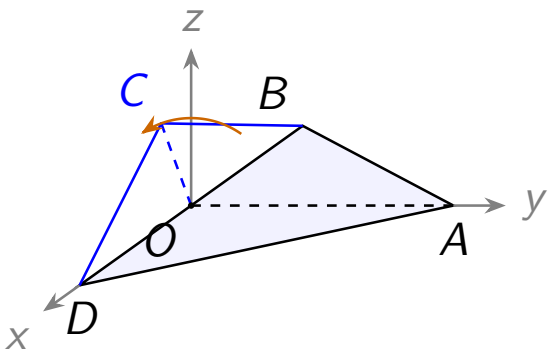
D. $\frac{6\sqrt{111}}{37}$



第 8 题：参考答案与解析（1/5）

答案：B.

取 BD 中点 O 为原点，OD 为 x 轴正半轴，OA 为 y 轴正半轴，建立右手空间直角坐标系．固定 $\triangle ABD$ 在 xOy 平面内，让 C 绕 BD 转动．



第 8 题：参考答案与解析（2/5）

由题意，$AO = 3$，$CO = 1$．设 $\theta = \angle AOC$，则

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$

不妨取 C 位于 $z > 0$ 的一侧，则

$$A(0, 3, 0), \quad B(-\sqrt{3}, 0, 0),$$
$$D(\sqrt{3}, 0, 0), \quad C(0, \cos\theta, \sin\theta).$$

$$\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{3}, -3, 0),$$
$$\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3}, -\cos\theta, -\sin\theta),$$
$$\overrightarrow{BC} = (\sqrt{3}, \cos\theta, \sin\theta).$$

第 8 题：参考答案与解析（3/5）

设公垂线的方向向量为 $\boldsymbol{n} = (u, v, w)$．由

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \qquad \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0,$$

得

$$\begin{cases} -\sqrt{3}u - 3v = 0, \\ \sqrt{3}u - v\cos\theta - w\sin\theta = 0. \end{cases}$$

因 $\sin\theta > 0$，可取

$$\boldsymbol{n} = (-\sqrt{3}\sin\theta, \sin\theta, -3 - \cos\theta).$$

第 8 题：参考答案与解析（4/5）

将 $\overrightarrow{BC}$ 向公垂线方向投影，得

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\boldsymbol{n}|} \\
&= \frac{6 \sin \theta}{\sqrt{4 \sin^2 \theta + (3 + \cos \theta)^2}} \\
&= \frac{6}{\sqrt{4 + \left(\dfrac{3 + \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2}}.
\end{aligned}
$$

第 8 题：参考答案与解析（5/5）

由恒等式

$$4\sin^2\theta + (3+\cos\theta)^2 = 12\sin^2\theta + (1+3\cos\theta)^2,$$

得

$$d = \frac{6}{\sqrt{12 + \left(\dfrac{1+3\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2}} \le \frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}.$$

当 $\cos\theta = -\dfrac{1}{3} \in [-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}]$ 时，分母取最小值 $\sqrt{12}$，距离取最大值．

故 $d_{\max} = \sqrt{3}$，选 B．

第 9 题

下列说法正确的是（　）.

A. 若 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$，则事件 A, B 相互独立与事件 A, B 互斥不能同时成立

B. 事件 A 与事件 B 同时发生的概率一定比 A 与 B 中恰有一个发生的概率小

C. 对立事件一定是互斥事件，互斥事件不一定是对立事件

D. 事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的概率一定比 A 与 B 中恰有一个发生的概率大

第 9 题：参考答案与解析（1/2）

AC.

对于 A，因 $P(A) > 0$、$P(B) > 0$，若 A, B 相互独立，则 $P(AB) = P(A)P(B) > 0$，二者不互斥；若 A, B 互斥，则 $P(AB) = 0 \neq P(A)P(B)$，二者不独立，故 A 正确.

对于 B，举反例：在等可能样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ 中，取 $A = \{1\}$，$B = \{1, 2\}$. 则

$$P(AB) = \frac{1}{4}, \qquad P\big((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)\big) = \frac{1}{4}.$$

两种概率相等，不满足“一定比……小”，故 B 错误.

第 9 题：参考答案与解析（2/2）

对立事件一定互斥，但互斥事件不一定对立，故 C 正确.
当 A, B 互为对立事件时，“至少一个发生”与“恰有一个发生”为同一事件，两者概率相等，故 D 错误.

第 11 题

在空间直角坐标系 O-xyz 中，已知向量 $\boldsymbol{u}=(a,b,c)$（$abc\neq 0$）．经过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且法向量为 $\boldsymbol{u}$ 的平面方程为 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$；经过点 P_0 且一个方向向量为 $\boldsymbol{u}$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$. 根据以上材料，下列说法正确的是（　）．

A. 若直线 l 的方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$，则 $\boldsymbol{a}=(2,0,-1)$ 与直线 l 平行

B. 已知平面 α 的方程为 $x-y+z=1$，平面 β 的方程为 $x+2y-z=6$，则两平面所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{3}$

C. 已知平面 α 的方程为 $3x-4y+5z=7$，则点 $M(1,1,1)$ 到平面 α 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

D. 已知平面 α 的方程为 $3x+2y-z=5$，平面 β 的方程为 $2x+y+z=0$，平面 γ 的方程为 $x-y+z=0$，$\alpha\cap\beta=l$，则直线 l 与平面 γ 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{105}}{15}$

第 11 题：参考答案

BC.

第 12 题

从 A, B, C, D, E 中随机选 3 个字母，则 A, B 都入选的概率为 _____.

第 12 题：参考答案与解析

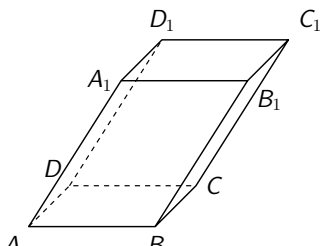
$\frac{3}{10}$．从五个字母中选三个共有 10 个基本事件：

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.$$

其中 A, B 都入选的有 ABC, ABD, ABE，故所求概率为 $\frac{3}{10}$．

第 13 题

如图，在平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$AD=3$，$AA_1=5$，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BAA_1=\angle DAA_1=\dfrac{\pi}{3}$，则 AC_1 的长为 _____.



第 13 题：参考答案

$\sqrt{85}$.

第 14 题

设空间两个单位向量 $\overrightarrow{OA} = (m, n, 0)$，$\overrightarrow{OB} = (0, n, p)$（$n > 0$）与向量 $\overrightarrow{OC} = (1, 1, 1)$ 的夹角都等于 $\frac{\pi}{3}$，则 $\cos \angle AOB =$_____.

第 14 题：参考答案

$$\frac{4+\sqrt{15}}{8}.$$

第 17 题

已知 A，B 是圆 C: $x^2+y^2=4$ 与 y 轴的两个交点，且 A 在 B 上方.

(1) 若直线 l 过点 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，且与圆 C 相切，求 l 的方程.

(2) 已知斜率为 k 的直线 m 过点 $(0,1)$，且与圆 C 交于 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 两点，直线 AM，BN 相交于点 $T(x_0,y_0)$.

① 证明: $\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2}{3}k$;

② 是否存在常数 t，使得 $\dfrac{y_0-2}{y_0+2}=t$? 若存在，请求出 t 的值; 若不存在，请说明理由.

第 17 题：参考答案与解析（1/4）

(1)$x+y-2\sqrt{2}=0$
(2) 证明见解析
分析：（1）由切线的性质求直线 l 的斜率，进而求出方程；（2）先将直线 m 的方程代入圆的方程，利用韦达定理证明第（1）小问；再利用直线 AM，BN 的斜率以及韦达定理的结论证明第（2）小问.
（1）点 $P\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 的坐标满足 $x^2+y^2=4$，所以 P 为圆 C 上一点.
圆 C 的圆心为 $C(0,0)$，且 $k_{CP}=1$，所以直线 l 的斜率为 -1，……2 分
所以直线 l 的方程为 $y-\sqrt{2}=-\left(x-\sqrt{2}\right)$，即 $x+y-2\sqrt{2}=0$. ……4 分

第 17 题：参考答案与解析（2/4）

(2) 证明：由圆 C 可得 $A(0,2)$，$B(0,-2)$.

① 直线 m 的方程为 $y=kx+1$. 将其代入圆 C 的方程，得

$$x^2+(kx+1)^2=4,$$

即

$$(1+k^2)x^2+2kx-3=0.$$

由韦达定理，得

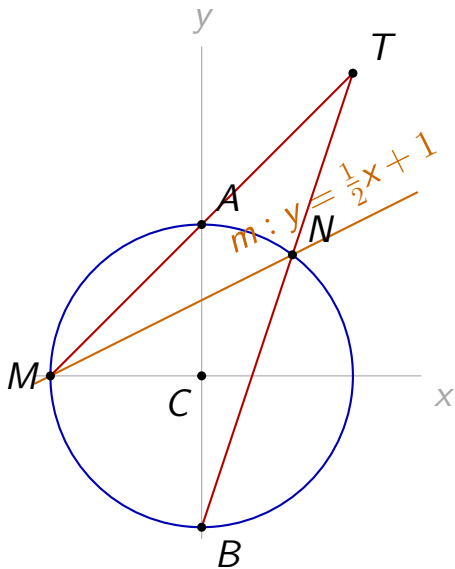
$$x_1+x_2=-\frac{2k}{1+k^2},\qquad x_1x_2=-\frac{3}{1+k^2}.$$

所以

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}k.$$

……9 分

第 17 题（2）：几何示意



第 17 题：参考答案与解析（3/4）

② 由 M, N 在直线 m 上，得 $y_1 = kx_1 + 1$，$y_2 = kx_2 + 1$．由于直线 m 与 y 轴交于 $(0, 1)$，故 $x_1 x_2 \neq 0$．直线 AM，BN 的斜率分别为

$$\frac{y_1 - 2}{x_1} = \frac{kx_1 - 1}{x_1}, \qquad \frac{y_2 + 2}{x_2} = \frac{kx_2 + 3}{x_2}.$$

由于直线 AM 与 y 轴交于 A，故 $T \neq B$，从而 $y_0 + 2 \neq 0$．由 $T(x_0, y_0)$ 在直线 AM，BN 上，得

$$\frac{y_0 - 2}{y_0 + 2} = \frac{(y_1 - 2)/x_1}{(y_2 + 2)/x_2} = \frac{x_2(kx_1 - 1)}{x_1(kx_2 + 3)} = \frac{kx_1 x_2 - x_2}{kx_1 x_2 + 3x_1}.$$

第 17 题：参考答案与解析（4/4）

记 $D = 1 + k^2$．由（i）中的韦达关系，

$$2kx_1x_2 - 3(x_1 + x_2) = 2k\left(-\frac{3}{D}\right) - 3\left(-\frac{2k}{D}\right) = 0,$$

所以

$$3\left(kx_1x_2 - x_2\right) = kx_1x_2 + 3x_1,$$

从而

$$\frac{y_0 - 2}{y_0 + 2} = \frac{1}{3}.$$

……13 分

所以 $\dfrac{y_0 - 2}{y_0 + 2}$ 为定值，所求常数 t 存在． ……14 分

且 $t = \dfrac{1}{3}$． ……15 分

第 18 题

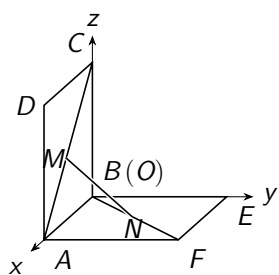
现有正方形框架 $ABCD$、$ABEF$，边长均为 1，平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，交线为 AB．动点 M 在对角线 AC 上、动点 N 在对角线 BF 上移动，满足 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BF}$，其中 $\lambda,\mu\in(0,1)$．

(1) 建立如图所示的空间直角坐标系，当 $\lambda+\mu=1$ 时，求 MN 的最小值，以及此时 M,N 的坐标．

(2) 在 (1) 取到最小值的前提下：

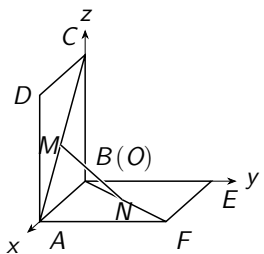
① 求平面 MNA 与平面 MNB 的夹角余弦值．

② 过点 N 作直线 $l\parallel AC$，探究直线 l 上是否存在点 P，使得 $MP\perp$ 平面 MNA，若存在求出 $\overrightarrow{NP}$，不存在说明理由．



第 18 题：参考答案与解析（1/6）

（1）在题图所示的空间直角坐标系中：



原点 O 与 B 重合，$\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}$ 分别沿 x 轴、y 轴、z 轴正方向，则

$B(0,0,0)$，　$A(1,0,0)$，　$E(0,1,0)$，

$F(1,1,0)$，　$C(0,0,1)$，　$D(1,0,1)$.

第 18 题：参考答案与解析（2/6）

设 $M(x,y,z)$．因为 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CA}$，所以 $(x,y,z-1)=\lambda(1,0,-1)$，即 $M(\lambda,0,1-\lambda)$．

同理，$\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BF}$，得 $N(\mu,\mu,0)$．

由 $\lambda+\mu=1$，得 $N(1-\lambda,1-\lambda,0)$．　……2 分

第 18 题：参考答案与解析（3/6）

$\overrightarrow{MN} = (1-2\lambda, 1-\lambda, \lambda-1)$，

$$\begin{aligned} MN^2 &= (1-2\lambda)^2 + 2(1-\lambda)^2 \\ &= 6\lambda^2 - 8\lambda + 3 \\ &= 6\left(\lambda - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

……4 分

因为 $\lambda \in (0,1)$，当 $\lambda = \dfrac{2}{3}$ 时取得最小值，故 $MN_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$．此时 $M\left(\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3}\right), N\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$．

……6 分

第 18 题：参考答案与解析（4/6）

(2) ① 由 (1) 得

$$\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right),\qquad \overrightarrow{AN}=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right).$$

平面 MNA 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(-1,-2,-1)$. 又

$$\overrightarrow{BM}=\left(\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right),\qquad \overrightarrow{BN}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right),$$

所以平面 MNB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(-1,1,2)$. ……8 分

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

所以平面 MNA 与平面 MNB 的夹角余弦值为 $\frac{1}{2}$. ……11 分

第 18 题：参考答案与解析（5/6）

② 因为 $l \parallel AC$，且 $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$，设

$$\overrightarrow{NP} = t(-1, 0, 1), \qquad P\left(\frac{1}{3} - t, \frac{1}{3}, t\right).$$

于是 $\overrightarrow{MP} = \left(-t - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, t - \frac{1}{3}\right)$. ……13 分

第 18 题：参考答案与解析（6/6）

若 $MP \perp$ 平面 MNA，则 $\overrightarrow{MP} \parallel \boldsymbol{n}_1$．设 $\overrightarrow{MP} = k\boldsymbol{n}_1$，则

$$\begin{cases} -t - \dfrac{1}{3} = -k, \\ \dfrac{1}{3} = -2k, \\ t - \dfrac{1}{3} = -k. \end{cases}$$

……15 分

由第二式得 $k = -\dfrac{1}{6}$，代入第一式得 $t = -\dfrac{1}{2}$，代入第三式得 $t = \dfrac{1}{2}$，矛盾．故直线 l 上不存在满足条件的点 P．

……17 分

第 19 题

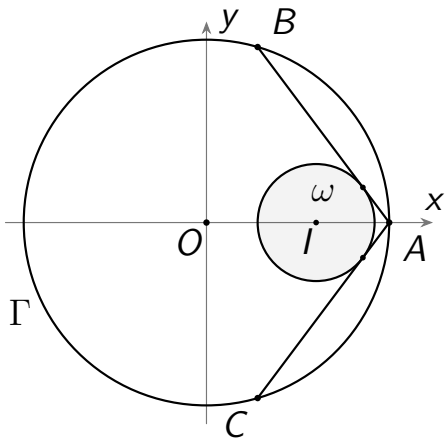
已知圆 $\Gamma: x^2+y^2=25$，圆 $\omega:(x-3)^2+y^2=\dfrac{64}{25}$，圆心分别为 O, I. 点 A 为圆 Γ 上的动点，过 A 作圆 ω 的两条切线，分别与圆 Γ 再交于 B, C.

(1) 当 $A(5,0)$ 时，求直线 AB, AC 的方程.

(2) 射线 AI 与圆 Γ 再交于点 D. 证明 DB, DC, DI 三条线段等长.

(3) 证明：无论点 A 在圆 Γ 上如何运动，直线 BC 始终与圆 ω 相切.

第 19 题（1）：切线方程



$A(5,0)$，$I(3,0)$，圆 ω 的半径为 $\frac{8}{5}$.

第 19 题（1）：参考答案与解析

（1）圆 ω 的圆心为 $I(3,0)$，半径为 $\frac{8}{5}$．直线 $x=5$ 不与圆 ω 相切，可设切线为 $y=k(x-5)$．由圆心到切线的距离等于半径，得

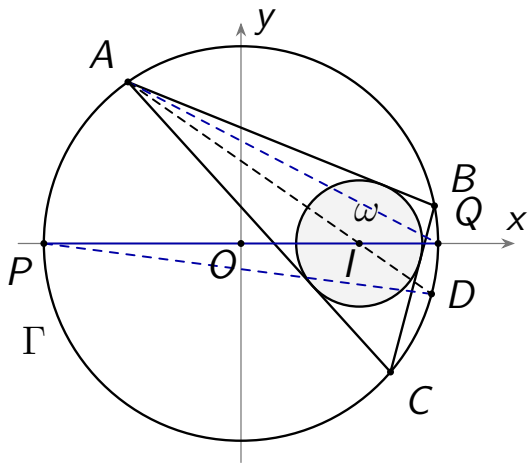
$$\frac{2|k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{8}{5} \quad\Longrightarrow\quad k=\pm\frac{4}{3}.$$

……2 分

故直线 AB, AC 的方程分别为 $4x-3y-20=0$ 与 $4x+3y-20=0$（两者可交换）．

……4 分

第 19 题（2）：连接 AQ、PD



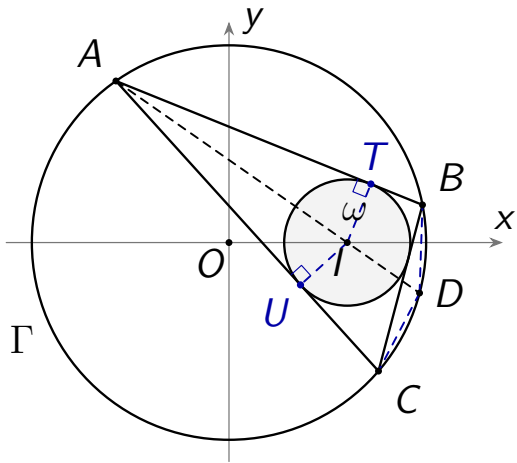
$P(-5,0)$，$Q(5,0)$；比较 $\triangle IAQ$ 与 $\triangle IPD$.

第 19 题（2）：利用相似三角形

（2）取 $P(-5,0), Q(5,0)$．当 A 不在 x 轴上时，由 $\triangle IAQ \sim \triangle IPD$，得 $AI \cdot ID = IP \cdot IQ = 8 \times 2 = 16$；　……7 分

当 A 在 x 轴上时，该等式也成立．由于 I 在圆 Γ 内，A, I, D 依次排列．

第 19 题（2）：标出切点，连接半径



T, U 为切点，$IT \perp AB$，$IU \perp AC$；连接 DB, DC.

第 19 题（2）：证明 DB=DC=DI

设圆 ω 与 AB, AC 分别相切于 T, U．因 $OI + \dfrac{8}{5} < 5$，圆 ω 完全位于圆 Γ 内，故 T, U 分别在线段 AB, AC 上．由切线性质，AI 平分 $\angle BAC$．记 $\alpha = \angle BAD = \angle DAC$，则 $\sin\alpha = \dfrac{IT}{AI} = \dfrac{8}{5AI}$．在三角形 ABD 中，由正弦定理，得

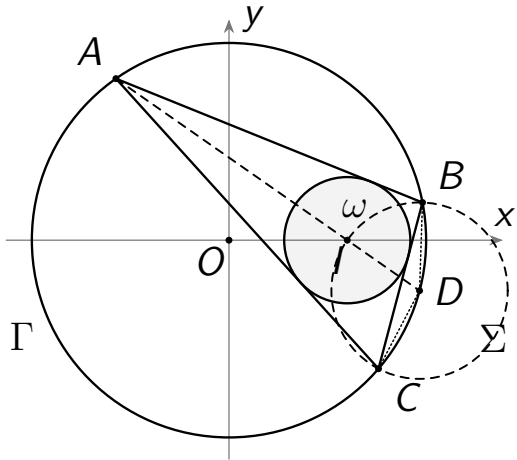
$$DB = 10\sin\alpha = \frac{16}{AI} = DI.$$

……9 分

同理，$DC = DI$，故 $DB = DC = DI$．

……10 分

第 19 题（3）：引入辅助圆



圆 Σ 以 D 为圆心、DI 为半径；BC 为两圆的公共弦.

第 19 题（3）：参考答案与解析

（3）由第（2）问，B, C 同在圆 Γ 和以 D 为圆心、DI 为半径的圆 Σ 上．

设 $D(p, q)$．由 $D \in \Gamma$，得 $p^2 + q^2 = 25$，且 $DI^2 = 34 - 6p$．故圆 Σ 的方程为

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 34 - 6p.$$

……12 分

将它与 $x^2 + y^2 = 25$ 相减，得公共弦 BC 所在直线的方程为 $px + qy = 8 + 3p$．点 $I(3, 0)$ 到该直线的距离为

$$\frac{|3p - (8 + 3p)|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{8}{5}.$$

……15 分

此距离等于圆 ω 的半径，故直线 BC 始终与圆 ω 相切．……17 分