高联检查清单（GAC）

LeyuDame

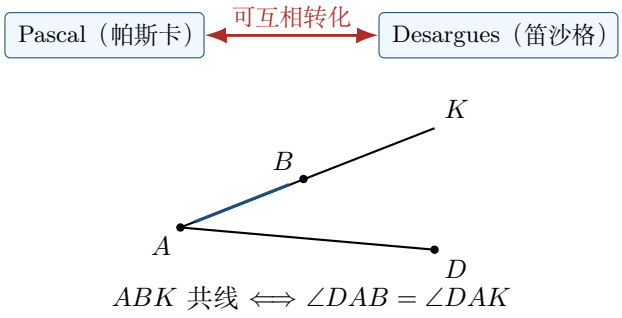
2026 年 11 月 3 日

一、平面几何

1. 纯几何

(1) 三点共线

- ☐ ① 转为三线交于一点。
- ☐ ② 帕斯卡定理（圆锥曲线上六点；原稿记为“圆内较多点”）。
- ☐ ③ 帕斯卡定理（直线形、退化构型）。
- ☐ ④ 梅涅劳斯定理的逆定理。
- ☐ ⑤ 算两次（异角）。
- ☐ ⑥ 平行结构：相似对应、位似。
- ☐ ⑦ 四点共线——找一找！
- ☐ ⑧ 两条直线 AK, BK 分 CD 的比例相同。
- ☐ ⑨ 弦幂、圆幂关系。
- ☐ ⑩ Simson 定理。



ABK 共线 $\Longleftrightarrow \angle DAB = \angle DAK$

提示：当目标是证明三点共线时，先观察能否把问题转成“三线共点”；Pascal 与笛沙格的构型可以相互转化。

(2) 三线交于一点

- ☐ ① 角元 Ceva（角好算）。
- ☐ ② 边元 Ceva（设法消去边长）。
- ☐ ③ 蒙日定理（多圆构型）。
- ☐ ④ 同一法。

(3) 四点共圆

- ☐ ① 导角。
- ☐ ② 导圆幂。
- ☐ ③ 托勒密定理。
- ☐ ④ 圆心有特殊性。
- ☐ ⑤ 三弦定理：

$$AB\sin\theta_2 + AD\sin\theta_0 = AC\sin(\theta_1+\theta_2).$$

- ☐ ⑥ 转为五点共圆。
- ☐ ⑦ 转轴引理。
- ☐ ⑧ 蒙日逆定理。

(4) 垂直

- ☐ ① 圆中有没有垂心？
- ☐ ② 根轴上连心线。
- ☐ ③ 极点、极线方法（可用向量表达）。
- ☐ ④ 定差幂线。

(4.1) 平行

- ☐ ① 导角。
- ☐ ② 导比例。
- ☐ ③ 雷姆定理。
- ☐ ④ 距离相等。
- ☐ ⑤ 找等长且方向相同的两条线段。

(5) 边相等

- ☐ ① 等腰转化成角。
- ☐ ② 典中典：圆幂式的等式特征。
- ☐ ③ 导圆幂。
- ☐ ④ 导三角。
- ☐ ⑤ 全等。

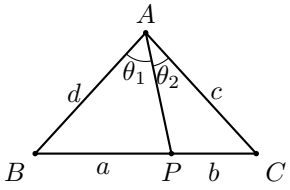
(6) 角相等

- ☐ ① 弧中点、内心 I 的相关推广性质。
- ☐ ② 等角转换（推广）。
- ☐ ③ 角元 Ceva：乘积等于 1。
- ☐ ④ 变相同一法（可用于证明 Pascal）。
- ☐ ⑤ 等腰。

(7) 三角法

- ☐ ① 配对。

- ☐ ② 对称。
- ☐ ③ 轮换。
- ☐ ④ 余弦定理。
- ☐ ⑤ 三弦、张角定理。
- ☐ ⑥ 应用条件：边角追踪；点较远或出现共线结构时尤其留意。
- ☐ ⑦ 典型分角构型（记下公式，做题较快）。
- ☐ ⑧ 面积法。
- ☐ ⑨ 余切联合法。



$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{ac}{bd}.$$

分角定理的常用形式。

(8) 圆的相交与相切

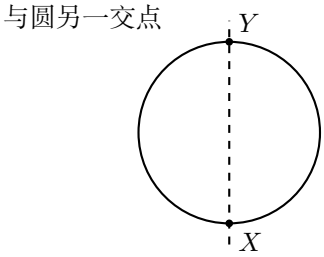
- ☐ 两圆相交，必有平行（雷姆定理）。
- ☐ 三圆相交，密克定理（有时先考虑蒙日定理）。
- ☐ 当两圆相交、过某点出现两条直线时，优先联想到上述结构。
- ☐ 两圆相切时，注意特殊切点；否则可以再找另一个交点。
- ☐ 重新刻画切点：不要只说“点在圆上”，它有可能是重合点。

2. 平面几何中的其他方法

Top 1： 消点法！旨在使题目变简单。

Top 2： 一个点既在圆上、又在一条线段（直线）上：考虑补出该直线与圆的另一个交点。

Top 3： 余切联合法。



(1) 同一法 例题：梅涅劳斯定理逆定理。

(2) 向量法 例题：定差幂线（等差幂线）。

(3) 三角法 例题：蒙日定理。

(4) 代数法 例题：与两圆相切有关的构形；甚至“伊朗96”也可以用几何去解释。

3. 联赛不让用的思想方法

按原稿表述；实际答题时仍应以具体竞赛的书写规范和允许工具为准。

- ☐ **(1) 建立笛卡尔平面直角坐标系。**
  - **(1.1)** 选定一个方向，计算各点在该方向上的坐标；另一方向不必显式设斜率。
  - 不建议在正式解答中直接写出，但草稿中可以用坐标或向量计算；图太多时不妨换一种想法。
- ☐ **(2) 调和。**
  - 关注调和点列中的比例关系，简单了解即可；遇到角分点、垂足或垂直结构时，可以尝试调和方法。
- ☐ **(3) 反演。** 多圆之神。
- ☐ **(4) 复数。** 好东西。

二、代数

本部分将扫描稿中的代数清单整理为“题型识别—方法选择—局部技巧”的顺序。

(0) 近年题型总览

- □ 传统不等式：恒等变形、放缩、均值不等式、柯西不等式等。
- □ 数列问题：递推、单调性、有界性、极限、构造与归纳。
- □ 组合结构型代数题：把计数、排列、集合或局部结构翻译为代数关系。
- □ 离散不等式与极值问题：整数性、奇偶性、最大最小值和局部化。

总的判断：先确认题目究竟是在处理不等式、数列，还是带有组合结构的代数关系；再决定使用放缩、递推、归纳、极值、换元或构造。不要因为题面形式复杂，就忽略最基本的代数结构。

(1) 数列问题方法概述

Step 1. 一般化入手点

- □ 从小情形入手：先写出前几项，观察对称性、周期性、单调性以及是否存在隐藏的规律。
- □ 从数列的性质入手：单调性、有界性、周期性、收敛性，以及最大项、最小项的位置关系。
- □ 从极限或增长速度入手：比较 a_n 与 n、n^2、q^n 等基本量的数量级。
- □ 研究“等号什么时候成立”：许多不等式型数列题，等号条件本身就是构造数列的线索。

Step 2. 放缩、递推与构造

- □ 直接放缩：使用恒不等式、均值不等式或单调性；每次放缩都要检查方向和等号条件。
- □ 构造辅助数列：对原数列 $\{a_n\}$ 构造较容易处理的 $\{b_n\}$，使 $a_n \le b_n$ 或 $b_n \le a_n$，再研究 b_n 的递推或极限。
- □ 处理递推：尝试相减、相除、移项、望远镜求和，以及寻找不变量或单调量。
- □ 处理线性递推：写出特征方程，必要时使用特征根、通项公式或生成函数。
- □ 不要忽视特殊的构造：最小项、最大项、递推式下的相减，常常比硬算通项更快。
- □ 数列收敛性可以转化为放缩、夹逼、积分估计或单调有界；但要区分“有界”与“收敛”。

Step 3. 介值思想在数列构造中的运用

- □ 构造循环数列或周期数列，使递推关系在一圈之后回到初始状态；再用连续性或介值思想判断是否存在所需参数。
- □ 先构造少量项，再把局部关系推广成整个数列的结构；构造时优先寻找能闭合的等式。
- □ 若能找到 $a_1 < a < a_k$，且相邻项满足 $|a_{i+1}-a_i| \le \ell$，则检查数列是否必然经过区间 $[a, a+\ell]$。
- □ 介值思想也可以离散化：对整数变量、奇偶变量分别寻找相邻状态之间的跳跃限制。

Step 4. 特殊数列结构

- □ 识别超可加结构，例如 $a_{i+j} \ge a_i + a_j$，尝试把多个小指标合并成一个大指标。
- □ 识别凸性：若差分单调、二阶差分非负，或函数本身凸，优先考虑凸函数与弦线、切线、均值之间的关系。
- □ 识别周期与循环：周期性往往允许按一个周期求和、分组或归纳。
- □ 当题目给出“所有 i, j”或“任意两项”的关系时，尝试固定其中一个指标，再进行归纳或极值分析。

(2) 不等式问题方法概述

Step 1. 一般化入手点：先找等号、边界与局部结构

- □ 先找等号：猜测等号构型，再反推需要的恒等变形或放缩链。
- □ 两点分布、多个点分布：遇到 $x \in [a,b]$、$|x-y|$、$|a-a_{n+1}|$ 等表达式时，检查是否可以把问题局部化。
- □ 极限原则：考察 $a \to +\infty$、$a \to 0^+$ 或某个参数趋于边界时的行为；注意极限相同不代表有限情形恒等。
- □ 等差、等比与递推替换：当变量之间有固定差、固定比或递推关系时，先把结构参数化。
- □ 对排在直线、区间或圆周上的数，检查相邻项、连续三项和极端项之间的关系。

Step 2. 局部化与离散化

- □ 连续变量局部化：

$$x \in [a,b] \quad \Longrightarrow \quad (x-a)(x-b) \le 0.$$

- □ 整数变量局部化：对 $x, n \in \mathbb{Z}$，有

$$(x-n)(x-n-1) \ge 0,$$

可将“整数性”直接写入代数式。

- □ 整数、奇偶、取整型局部结构：分别尝试写成 $x = 2k$、$x = 2k+1$、$\lfloor x \rfloor$ 或 $\lceil x \rceil$，不要把离散条件当作无关背景。
- □ 绝对值的代数化：

$$|x-y| = x + y - 2\min\{x, y\}.$$

适合与极值、排序或配对结合。

(3) 针对极值的特殊方法

- ☐ 取最大项、最小项，并让极值向边界递缩；选择极值对象时，要同步检查其邻接关系或替换后结构。
- ☐ 线性调整：把变量向边界移动，观察目标量的变化，建立“增加或减少一个单位”的比较关系。
- ☐ 正负分离：将正项、负项或不同符号的项分开处理；若直接拆分过于粗糙，再考虑重新配对或整体放缩。
- ☐ 对称化与平滑：在保持约束或主要不变量的前提下，把两个变量向平均值靠拢，观察目标是否单调变化。
- ☐ 对圆周排列或有序数列，尝试使用连续三项、相邻差或极端项的引理。
- ☐ 极值法的本质是把一个全局问题压缩到少数极端对象上；压缩后仍要检查构造是否保持原条件。

(4) 针对二次型的处理方式

- ☐ 归纳法：先观察 $n=1,2,3$ 的形式，再决定按变量个数、次数或结构归纳。
- ☐ 恒等变形与配方：补平方、拆平方差、加入对称项，必要时强行增加表达式的对称性。
- ☐ 熟悉基本恒等式，例如

$$k^2 = 1+3+5+\cdots+(2k-1),$$

  并检查能否把二次量改写成可求和的线性结构。
- ☐ 柯西不等式、均值不等式：先判断使用后是否能产生题目需要的平方和、乘积或对称量。
- ☐ 比较系数：将目标式改写为若干基本非负量的线性组合，再比较各项系数。
- ☐ 调整或压缩不等式：当多次放缩方向不理想时，回到等号条件重新选择中间量。

(5) 分式、齐次型与根式不等式

- ☐ 柯西不等式：尤其留意分母为和、分子为平方或目标需要统一分母的情形。
- ☐ 配均值：例如 $x,y>0$ 时，

$$\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right),$$

  可把分母中的和拆成更容易合并的形式。
- ☐ 齐次化：先确认各项次数，再选择 $x+y=1$、$xy=1$ 或其他等价归一化；不要在尚未确认齐次性时随意归一化。
- ☐ 根式处理：先判断定义域，再平方、配方、通分或有理化；非标准放缩必须检查是否损失等号。
- ☐ 裂项、放大与 Abel 变换：适用于求和式中相邻项、差分或部分和结构明显的情形。

(6) 指数型与复数不等式

- ☐ 指数为正整数时，优先尝试均值不等式、Hölder 不等式或降次；先看指数能否被拆成若干相同的因子。
- ☐ 指数为实数时，留意加权均值、凸性和 Bernoulli 型不等式；检查参数范围与等号条件。
- ☐ 复数不等式先实数化：令 $z=x+iy$，把模长平方写成 x^2+y^2，再使用实变量方法。
- ☐ 遇到模长先平方；若平方后仍不便处理，再考虑三角表示或把复数放到复平面中解释。
- ☐ 将模长转为实部：

$$|z| = \max_{\theta\in\mathbb{R}} \mathrm{Re}(e^{-i\theta}z),$$

  可把复数问题转成带参数的实数不等式。
- ☐ 复数方法也可以服务于几何不等式；关键是先找到代数表达式与几何量之间的对应关系。

(7) 换元、调序与区间方法

- ☐ 常用换元：差值换元、比例换元、倒数换元，以及用 a_n/a_{n-1} 研究乘法递推。
- ☐ 特殊范围换元：若 $x_i\ge 2$，可尝试 $x_i=t_i+t_i^{-1}$；若 $|x_i|\le 1$，可尝试 $x_i=\cos\theta_i$ 或其他三角换元。
- ☐ 三角换元通常要与根式、圆或单位区间结构一起出现；换元后要明确参数范围。
- ☐ 调序型不等式先判序：排列变量、比较相邻差或使用重排思想；但有些代数题可以先不排序，通过对称化直接简化。
- ☐ 区间 $[0,1]$ 方法：将变量归一化到单位区间，再用凸性、端点值或介值思想处理。

(8) 组合结构型代数问题

无明显思路时，先从最小规模 $n=1,2,3$ 开始。若题目声称存在某个对象、某个值或某种构造，先分析小规模下它是如何出现的，再决定使用直接构造、平均值、介值或归纳。

A. 分类讨论型

- ☐ 按变量范围、符号、奇偶或相等关系细化情形；每种情形都要保证覆盖且互不遗漏。
- ☐ 极值原理：固定整体条件后，选择最大、最小或最先出现的对象，分析它对其余对象的限制。
- ☐ 归纳法：从小规模构造到一般规模，关注新增的一个点、一个块、一条边或一项变量。
- ☐ 取最大值、最小值来观察：先判断极值对象必须满足的局部条件，再回到整体结论。

B. 与 $\max,\min$ 有关的问题

- ☐ 从 $n=1,2,3$ 的小情形开始，观察何时取等、哪些项真正控制最大值或最小值。

- ☐ 配出特定系数：通过补项、配对或加权，把 max、min 与题目中的系数接起来。
- ☐ 调整法：改变极值对象附近的局部结构，比较调整前后的目标值，寻找单调的替换过程。
- ☐ 局部化：在所有可能的最大值、最小值中，先确定哪些值会真正影响结论，再处理其余变量。
- ☐ 不要忘记 $\max, \min$ 还可以与加权平均、几何平均、幂平均或凸组合联系起来。

三、组合

本部分按扫描稿中的“方格表—集合—计数—图论—组合几何—博弈”六条主线整理。

(0) 近年题型总览

- ☐ 方格表与染色：整体分析、局部分析、降维、代数化、图论化。
- ☐ 集合类问题：集合细化、抽屉原理、二部图、排序、配对与容斥。
- ☐ 计数问题：分步计数、归纳、双射、映射、存在性与极值。
- ☐ 图论问题：度数、路径、连通性、删点删边、DFS、BFS、匹配与极值图论。
- ☐ 组合几何与双人游戏：降维、构造、运动观点、策略对应与逆向分析。

(1) 组合问题的总入手方式

第一步：先从小情形开始，观察状态如何一步步变化。
第二步：若路径或递推关系可以直接写出，先直接分析；若状态过多，先拆分成局部结构。
第三步：不断问“下一步可以怎样进行”，尝试构造一条逐渐靠近目标的链，并记录过程中保持不变的量。

(2) 方格表问题方法概述

- ☐ 归纳法：可以按行数、列数、分割数或方块数归纳；若结构不规则，先固定一个方块或一条边再归纳。
- ☐ 染色法：面对方格表中的覆盖、路径、邻接或区域问题，先尝试构造颜色不变量；注意染色不一定只有一种方案，同一题可能需要多种染色共同使用。
- ☐ 代数化：二染色时可把颜色记为 $0,1$ 或 $+1,-1$，研究每行、每列的和、积或总和，从而把图形关系转成代数关系。
- ☐ 降维：固定一行、一列、一条带或一个局部区域，先研究低维截面，再将结论推广到整体。
- ☐ 图论化：把行、列、格点或区域作为顶点，把相邻、相交、同色、覆盖等关系作为边；必要时转成二部图、匹配或覆盖问题。
- ☐ 概率法：随机染色、随机选点或随机选取局部结构，用概率非零或期望值证明对象存在。
- ☐ 极端原则：选取最长、最短、最多、最少或度数最大的行列，研究极端对象对其余结构的限制。
- ☐ 构造与不变量：从一个已经完成或接近完成的构型出发，做局部修改；每一步都记录保持不变的量或单调变化的量。
- ☐ 算两次：按顶点、边、面、颜色或某种局部图案分别计数，比较两种计数结果。

方格表题的关键常常不是“把每个格子都看一遍”，而是找到合适的整体量：行列和、颜色差、度数、边界、连通块或局部图案。

(3) 集合问题方法概述

- ☐ 归纳法：从集合大小为 $1,2$ 的情形开始，观察集合之间的包含、交、并或差如何递进。
- ☐ 集合细化：按元素的性质、出现次数、所在位置或与其他集合的关系分类，必要时把一个集合拆成若干子集。
- ☐ 抽屉原理：优先寻找“对象放入抽屉”的对应关系；也可以选取集合中的最小元素或最先出现的元素来建立归属。
- ☐ 二部图处理：一侧表示集合，另一侧表示元素或条件，用连边表示“属于”“相交”或“满足关系”。
- ☐ 排序与组合：将集合元素排序，考察相邻元素、端点元素和间隔，再与组合数或递推结合。
- ☐ 算两次：对集合中的元素、集合之间的交或包含关系分别计数；典型形式是

$$\sum_{x\in X} d(x) = \sum_{y\in Y} d(y).$$

- ☐ 配对：当集合之间存在对应关系时，尝试建立一一配对、对称配对或逆向配对。
- ☐ 容斥原理：多个集合的并集、交集或“至少满足一个条件”出现时，先判断是否适合容斥。

(4) 计数问题方法概述

- ☐ 分步计数：把过程拆成若干阶段，每个阶段分别计数，最后根据阶段之间是乘法关系还是加法关系合并。
- ☐ 归纳计数：增加一个元素、一个位置或一个步骤，比较新旧对象之间的对应关系。
- ☐ 映射与双射：把原问题转化为另一个更容易计数的对象；优先寻找可逆映射，而不是只进行单向估计。
- ☐ 单射与满射：当只需要比较数量时，构造单射或满射可能比精确计数更简单。

- ☐ 若题目只问存在性、最大值或最小值，可以先尝试构造一个对象、估计平均值或使用极值原理，不必一开始就精确枚举。
- ☐ 计数时要明确对象是否有序、是否允许重复、是否区分位置；这是最常见的漏计和重计来源。

(5) 图论问题方法概述

Step 1. 什么时候图论化？

- ☐ 题目中存在明显的二元关系：相邻、不相邻、相交、相连、互相认识、满足同一条件等。
- ☐ 集合问题、方格表问题、排列问题和映射问题，都可能隐藏着图论模型。
- ☐ 注意题目中的隐含关系：即使题面没有出现“图”，只要对象之间的关系可以用点和边表达，就值得尝试图论化。

Step 2. 静态分析

- ☐ 算两次：度数和、边数、路径数、局部图案数是最常见的整体量。
- ☐ 极值原则：寻找最长路、最短路、最大度数、最小度数或极端连通块。
- ☐ DFS 与 BFS：以树根或指定顶点为出发点，按深度、层次或距离分析；带有层数和度数条件时尤其有用。
- ☐ 算法视角：不妨了解 Kruskal 最小生成树、匹配算法、Hamilton 路或回路等模型，即使正式竞赛中不一定直接使用算法名称。
- ☐ 基本度数公式：

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|.$$

先判断题目是否可以通过度数总和得到全局限制。

Step 3. 动态分析与归纳

- ☐ 常规删法：删去一个顶点、一个端点、一个度数极端的点或一条割边，观察剩余图的性质。
- ☐ 非常规删法：删去一个点的同时删去与它相关的点、边或局部结构；关键是保证删后问题仍属于同一类。
- ☐ 加点、加边与缩边：反向构造比正向删除更自然时，可以从小图逐步增加结构。
- ☐ 第二数学归纳法：按顶点数、边数或连通块数归纳；每次归纳都要说明删去或加入的对象是什么。
- ☐ 动态方法也可以与反证法结合：假设不存在目标构型，再不断删去或调整，直到与极小性或极大性矛盾。

Step 4. 极值图论与构图

- ☐ 选取一个满足条件的极值图，研究它的整体度数、路径、连通性或割集结构。
- ☐ 将局部限制推广到整体：若每个点都受到某种限制，先统计局部贡献，再判断整体是否可能存在。
- ☐ 构造一个接近目标的图，使用不变量或单调量说明“接近”的程度不断改善。

(6) 组合几何问题方法概述

- ☐ 归纳与递推：按点数、边数、分割数或多边形边数递进，寻找新增部分与旧构型的关系。
- ☐ 降维：正多边形、空间投影或高维构型可以先固定一个方向、一个截面或一个局部区域。
- ☐ 直角型构造：遇到垂直、距离或长度关系时，尝试把几何对象转成三角形、长度和或整数关系。
- ☐ 运动观点：让点、线或图形连续运动；若某个量在运动前后符号不同，可尝试介值定理。
- ☐ 组合几何中的“算两次”常表现为按点、线段、区域或交点分别计算；先明确每次计算的对象是什么。

(7) 双人游戏与策略问题

- ☐ 对应策略：针对对手的每一种可能操作，寻找自己的回应或配对操作；本质是构造一个策略映射。
- ☐ 从最后一步往前分析：先研究终止状态、必败状态和必胜状态，再逆向判断前一状态。
- ☐ 从小情形开始：列出最小规模的胜负表，观察是否存在周期、对称、奇偶或不变量。
- ☐ 记录状态变化：每一步寻找不变量、单调量或势函数，避免只凭局部直觉判断胜负。
- ☐ 若策略依赖某个极端对象，尝试把问题改写为极值问题，再使用归纳或构造完成证明。

组合题的思考方向很多，但共同的起点很稳定：从小情形开始，明确状态、操作和目标；然后寻找不变量、递推、双射、极值对象或局部到整体的桥梁。