立方体的旋转对称性

LeyuDame

2026 年 8 月 30 日

摘要

本讲义系统整理立方体的 24 个旋转对称。核心做法是按旋转轴的几何类型分类，再记录这些旋转作用在六个面上的循环结构。读者将能独立得到 $1+9+6+8=24$，把分类结果代入伯恩赛德引理，计算立方体面染色的等价类数，并将同一套方法迁移到正八面体的面染色问题。

目录

1 问题背景 **2**

2 预备知识 **2**

3 核心方法：按旋转轴分类 **3**

4 循环结构总表 **6**

5 典型应用：面染色的等价类 **6**

6 典型应用二：正八面体染色计数 **7**

7 常见误区与方法小结 **9**

8 课后练习 **9**

1 问题背景

在波利亚枚举和伯恩赛德引理的题目中，只知道立方体有 24 个旋转还不够。每一种旋转如何置换面、棱和顶点，决定了它在计数公式中贡献多少固定对象。若逐个想象 24 种旋转，容易漏数或重复计数；按旋转轴分类，可以把问题压缩为三类几何情形。

本讲义围绕三个问题展开：

1. 立方体的旋转轴有哪几类，每类产生多少个旋转？
2. 这些旋转作用在六个面上时，循环结构分别是什么？
3. 如何把循环结构用于伯恩赛德引理？

全文只讨论保持方向的旋转，不把镜面对称或其他反射变换计入旋转群。

2 预备知识

2.1 立方体的三个基本集合

立方体有 6 个面、12 条棱和 8 个顶点。记它的旋转群为 G。每个旋转都把面、棱和顶点分别置换，因此 G 可以作用在这三个有限集合上。

把一个旋转作用在六个面上，会得到一个置换。置换分解成若干个互不相交的循环，例如 $1^2 4^1$ 表示两个面保持不动，另外四个面组成一个四循环。循环的个数决定了染色计数：如果一个旋转在面上有 c 个循环，那么用 q 种颜色给六个面染色时，被这个旋转保持不变的染色有 q^c 种。

2.2 伯恩赛德引理

若有限群 G 作用在有限集合 X 上，则轨道数为

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\operatorname{Fix}_X(g)|,$$

其中 $\operatorname{Fix}_X(g)$ 表示在 g 作用下保持不变的 X 中元素集合。

对面染色而言，X 是所有染色方案的集合；要计算 $\operatorname{Fix}_X(g)$，只需数出旋转 g 在六个面上的循环个数。

3 核心方法：按旋转轴分类

3.1 关键观察

非恒等旋转的轴都经过立方体中心。轴与立方体边界相交的方式只有三种：穿过一对相对面的中心、穿过一对相对棱的中点，或穿过一对相对顶点。于是只要分别数出这三类轴，再数每条轴允许的旋转角度，就能得到全部旋转。

三类轴的条数直接来自对径配对：

$$\frac{6}{2}=3\ （相对面），\qquad \frac{12}{2}=6\ （相对棱），\qquad \frac{8}{2}=4\ （相对顶点）.$$

3.2 恒等旋转

恒等旋转只有 1 个。它固定全部 6 个面、12 条棱和 8 个顶点；作用在六个面上时，循环结构为 1^6。

3.3 穿过相对面中心的轴

这类轴共有 3 条。绕其中任意一条轴，立方体可以旋转 90°、180° 或 270°，因此得到

$$3\times 3=9$$

个非恒等旋转。

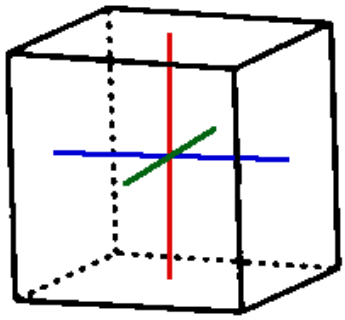


图 1: 穿过相对面中心的三条旋转轴。

图中的红、蓝、绿色线段分别表示三条面心轴。

其中，90° 和 270° 旋转各有 3 个，共 6 个。它们固定两个相对面，不固定任何棱或顶点；在六个面上形成的循环结构都是

$$1^2 4^1.$$

每条轴的 180° 旋转共有 3 个，同样固定两个相对面，不固定棱或顶点；面上的循环结构都是

$$1^2 2^2.$$

同一类中的循环结构相同，原因有两点：三条轴在立方体的旋转下彼此等价；90° 与 270° 互为逆旋转，而一个置换与其逆置换具有相同的循环长度。

3.4 穿过相对棱中点的轴

相对棱共有 $12/2 = 6$ 对，因此有 6 条这样的轴。每条轴只有一个保持立方体的非恒等旋转，即 180° 旋转，于是得到 6 个旋转。

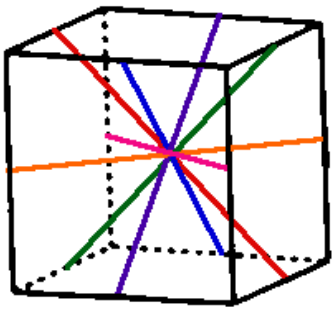


图 2: 穿过相对棱中点的六条旋转轴。

每个旋转固定两条相对棱，不固定任何面或顶点。作用在六个面上时，三个面两两交换，循环结构为

$$2^3.$$

这 6 个旋转的循环结构完全相同。

3.5 穿过相对顶点的轴

相对顶点共有 $8/2 = 4$ 对，因此有 4 条这样的轴。绕其中任意一条轴，可以旋转 120° 或 240°，每条轴给出 2 个旋转，所以总数为

$$4 \times 2 = 8.$$

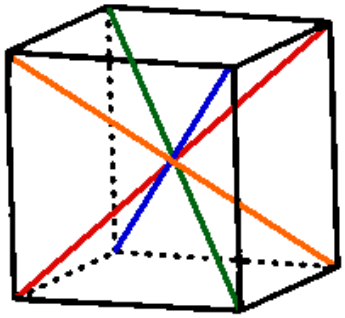


图 3: 穿过相对顶点的四条旋转轴。

每个旋转固定两个相对顶点，不固定任何面或棱。六个面分成两个三循环，循环结构为

$$3^2.$$

这 8 个旋转的循环结构也完全相同。

3.6 计数与完整性

把四种情形合并，得到

$$1 + 3(2 + 1) + 6 + 4(2) = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$$

这已经达到立方体旋转群的已知大小。几何分类也说明没有遗漏：旋转轴只能落入“相对面中心、相对棱中点、相对顶点”三种类型。因此上述列表正好给出完整的旋转群。

4 循环结构总表

下表把前面的几何信息集中起来。“固定面”等栏目按集合的置换来理解：一条棱被固定，指这条棱作为一个整体回到自身。

表 1: 立方体旋转在六个面上的循环结构。

旋转类型	元素数	固定面	固定棱	固定顶点	面上的循环结构
恒等旋转	1	6	12	8	1^6
面心轴，$90^\circ/270^\circ$	6	2	0	0	$1^2 4^1$
面心轴，180°	3	2	0	0	$1^2 2^2$
棱中点轴，180°	6	0	2	0	2^3
顶点轴，$120^\circ/240^\circ$	8	0	0	2	3^2

表中元素数之和为 24。对面染色使用伯恩赛德引理时，只需读取最后一列的循环个数：分别为 $6, 3, 4, 3, 2$。

5 典型应用：面染色的等价类

5.1 题目

将立方体的六个面分别染成 q 种颜色中的一种。若两个染色可以通过立方体的旋转互相得到，就把它们视为同一种。求不同染色的数量。

5.2 分析

一个染色在旋转 g 下保持不变，当且仅当同一个循环中的所有面颜色相同。若 g 在六个面上有 $c(g)$ 个循环，则固定染色数为 $q^{c(g)}$。根据总表：

- 恒等旋转贡献 q^6；
- 6 个 $90^\circ/270^\circ$ 旋转各贡献 q^3；
- 3 个面心轴 180° 旋转各贡献 q^4；
- 6 个棱中点轴 180° 旋转各贡献 q^3；
- 8 个顶点轴旋转各贡献 q^2。

5.3 解答

由伯恩赛德引理，不同染色的数量为

$$\begin{aligned} N(q) &= \frac{1}{24}\left(q^6 + 6q^3 + 3q^4 + 6q^3 + 8q^2\right) \\ &= \frac{q^6 + 3q^4 + 12q^3 + 8q^2}{24}. \end{aligned}$$

例如只有两种颜色时，

$$N(2) = \frac{2^6 + 3 \cdot 2^4 + 12 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2^2}{24} = 10.$$

5.4 点评

这道题的关键不在于逐一画出染色，而在于先得到旋转作用的循环结构。循环越少，能保持不变的染色越少；伯恩赛德引理再把所有旋转的固定染色数平均起来。若把镜面对称也计入，作用的群和平均分母都会改变，不能继续使用这里的 24。

6 典型应用二：正八面体染色计数

6.1 题目

用红、黄、蓝三色给正八面体的八个面染色，至少使用两种颜色。若两个染色可以通过正八面体的旋转互相得到，就把它们视为同一种。求不同彩色正八面体的数量。

6.2 关键转化：利用正八面体与正方体的对偶

正八面体的每个面中心对应一个正方体顶点，正方体的每个面中心也对应一个正八面体顶点。这种对应保持旋转：同一个空间旋转同时作用在两个多面体上。因此，正八面体八个面的旋转置换，可以改写成正方体八个顶点的旋转置换。

于是原题等价于：用红、黄、蓝三色给正方体的八个顶点染色，旋转后相同视为同一种，并要求至少使用两种颜色。

6.3 分析

沿用前面的旋转轴分类，只需把作用对象从六个面换成八个顶点。每个循环中的顶点必须同色，所以固定染色数等于颜色数的“循环个数次幂”。五类旋转的结果集中列在下表中。

表 2: 正方体旋转作用在八个顶点上的循环结构。

旋转类型	元素数	顶点上的循环结构	固定染色数
恒等旋转	1	1^8	3^8
面心轴，$90^\circ/270^\circ$	6	4^2	3^2
面心轴，180°	3	2^4	3^4
棱中点轴，180°	6	2^4	3^4
顶点轴，$120^\circ/240^\circ$	8	$1^2 3^2$	3^4

例如，顶点轴的 120° 或 240° 旋转固定轴上的两个顶点，其余六个顶点分成两个三循环，故循环结构为 $1^2 3^2$，固定染色数为 3^4。

6.4 解答

先暂时允许只使用一种颜色。由伯恩赛德引理，八个顶点的染色在旋转下的等价类数为

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{24}\left(3^8 + 6\cdot 3^2 + 3\cdot 3^4 + 6\cdot 3^4 + 8\cdot 3^4\right) \\ &= \frac{3^8 + 17\cdot 3^4 + 6\cdot 3^2}{24} \\ &= \frac{6561 + 1377 + 54}{24} = 333. \end{aligned}$$

只使用一种颜色的染色有三种：全红、全黄、全蓝。旋转不会改变所使用的颜色，因此这三种染色分别构成三个等价类。题目要求至少使用两种颜色，所以

$$M_{\geq 2} = 333 - 3 = 330.$$

6.5 点评

正八面体的“八个面”直接处理时不容易看出旋转后的轮换结构；换成对偶的正方体八个顶点后，三类旋转轴和对应循环一目了然。这个转化也说明，遇到正多面体染色题时，可以优先寻找对偶多面体，把面上的置换改写成顶点上的置换。

7 常见误区与方法小结

7.1 常见误区

1. **把轴数当成旋转数。** 3 条面心轴各产生 3 个非恒等旋转，4 条顶点轴各产生 2 个；同一条轴上的不同角度是不同的群元素。
2. **漏掉恒等旋转。**恒等旋转贡献 1 个元素，也是伯恩赛德平均中固定染色数最多的一项。
3. **混入反射。**本讲义的群只包含保持方向的旋转。镜面反射属于更大的对称群，计数时必须单独说明。
4. **误解“固定”。**在循环结构中，固定的是面、棱或顶点作为集合的置换位置；这不表示该面或棱上的每一个点都逐点不动。

7.2 方法提炼

遇到“立方体旋转、置换、染色、伯恩赛德”这类问题，可以按下面的顺序处理：

1. 先确认只考虑旋转，还是还包括反射；
2. 按旋转轴分类：面心轴、棱中点轴、顶点轴；
3. 对每一类数轴的条数和允许角度，得到元素数；
4. 记录作用在目标集合上的循环结构；
5. 用“每个循环一个颜色自由度”计算固定对象，再代入伯恩赛德引理。

最终的分类记忆为

$$\underbrace{1}_{\text{恒等}}+\underbrace{9}_{\text{面心轴}}+\underbrace{6}_{\text{棱中点轴}}+\underbrace{8}_{\text{顶点轴}}=24.$$

8 课后练习

1. 说明面心轴的 180° 旋转与棱中点轴的 180° 旋转在六个面上的循环结构为何分别为 $1^2 2^2$ 和 2^3。
2. 用本讲义的公式计算三种颜色给六个面染色时的等价类数。**答案：** $N(3)=57$。

参考资料

1. 原网页，〈立方体的旋转对称性〉，约克大学数学 4160 课程资料，访问日期：2026 年 8 月 30 日。https://garsia.math.yorku.ca/~zabrocki/math4160w03/cubesyms/
2. G. Pólya 与 R. C. Read，《群、图与化学化合物的组合枚举》，Springer，1987。出版社书页。
3. R. P. Stanley，《枚举组合学》第 1 卷，第 2 版，Cambridge University Press，2012。出版社书页；另见作者的配套主页。
4. “伯恩赛德引理”，Encyclopedia of Mathematics。条目页面。
5. “正八面体”与“八面体群”，Wolfram MathWorld。正八面体条目；八面体群条目。