yfd2026 年数学模拟卷参考答案汇编

LeyuDame

2026 年 11 月 3 日

目录

1 yfd-01 **1**

2 yfd-02 **9**

3 yfd-03 **13**

4 yfd-04 **18**

5 yfd-05 **22**

6 yfd-06 **27**

7 yfd-07 **32**

8 yfd-08 **37**

9 yfd-09 **43**

10 yfd-10 **49**

11 yfd-11 **53**

12 yfd-12 **57**

1 yfd-01

一试

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 给定正实数 a,b，满足

$$\{2,a+1,b^2\}\subseteq\{2,3,a,b\}.$$

则 $b=$

解答. 因为 $a+1$ 必须等于右边集合中的某个元素，所以只有三种可能：

$$a+1=2\Longrightarrow a=1,$$
$$a+1=3\Longrightarrow a=2,$$
$$a+1=b\Longrightarrow b=a+1.$$

前两种情形中，条件 $b^2 \in \{2,3,a,b\}$ 给出 $b \in \{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$；第三种情形给出 $b=\sqrt{2}$ 或 $b=\sqrt{3}$. 反过来，$(a,b)=(1,1),(1,\sqrt{2}),(1,\sqrt{3})$ 均满足题面条件，因此

$$b \in \{1,\sqrt{2},\sqrt{3}\}.$$

说明. 按当前题面可辨认的集合包含关系，参数 b 并不唯一；若原题另有未显示的限制条件，应先补齐条件再取相应分支。

2. 已知集合 $U=\{1,2\}$，A,B,C 是 U 的子集，且 $A\cup B\cup C=U$，则 $A\cap B\cap C=\varnothing$ 的概率为
解答. 对 U 中每个元素，(A,B,C) 的隶属模式只要不是 $(0,0,0)$，共有 7 种. 两个元素的模式彼此独立，所以满足并集为 U 的三元组共有 7^2 个. 若交集为空，则还要排除 $(1,1,1)$，每个元素有 6 种模式，故所求概率为

$$\frac{6^2}{7^2}=\frac{36}{49}.$$

3. 复数列 $\{z_n\}$ 满足：$z_1=1+i, z_2=1-i$，且

$$z_{n+2}=2z_{n+1}+3z_n.$$

则 z_{2026} 的值为
解答. 特征方程为 $(\lambda-3)(\lambda+1)=0$，故

$$z_n=A3^{n-1}+B(-1)^{n-1}.$$

由 $A+B=1+i$、$3A-B=1-i$ 得 $A=\frac{1}{2}$、$B=\frac{1}{2}+i$. 由于 2026 为偶数，

$$z_{2026}=\frac{3^{2025}-1}{2}-i.$$

4. 函数 $y=\sqrt{10-x}+\sqrt{2x+4}$ 的最大值与最小值之比为
解答. 定义域为 $[-2,10]$，且

$$y'=-\frac{1}{2\sqrt{10-x}}+\frac{1}{\sqrt{2x+4}}.$$

唯一驻点为 $x=6$，此时 $y=6$；端点值为 $2\sqrt{3}$、$2\sqrt{6}$. 所以最大值为 6，最小值为 $2\sqrt{3}$，所求比值为

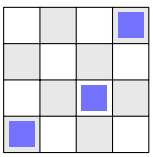
$$\sqrt{3}.$$

5. 在一个 4×4 的表格中等可能选取三个不同的方格，则这三个方格两两之间没有公共边的概率为
解答. 总数为 $\binom{16}{3}=560$. 先将方格染成黑白相间两色. 三格同色时自动满足条件，共 $2\binom{8}{3}=112$ 种. 若取两黑一白，固定白格分类：同色黑格共有 8 个，白格为角格、非角边格、内格时，分别有 $6,5,4$ 个黑格与它共边；因此

$$2\binom{6}{2}+4\binom{5}{2}+2\binom{4}{2}=82$$

种，取两白一黑同理也是 82 种. 故有利情况数为 $112+82+82=276$，概率

$$\frac{276}{560}=\frac{69}{140}.$$



同色格不共边；混色时按所选白格的位置分类

6. 已知四面体 $O-ABC$，$OA=2, OB=3, OC=4$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$N$ 为 BC 的三等分点（靠近 B），M 为 AN 的中点，过点 M 的动平面 α 交射线 OA,OB,OC 于 P,Q,R. 四面体 $OPQR$ 内切球的半径的最大值为
解答. 取

$$O=(0,0,0),\quad A=(2,0,0),\quad B=(0,3,0),\quad C=(0,0,4).$$

则 $N=(0,2,\frac{4}{3})$、$M=(1,1,\frac{2}{3})$．设 $P=(p,0,0),Q=(0,q,0),R=(0,0,r)$，并令

$$u=\frac{1}{p},\qquad v=\frac{1}{q},\qquad w=\frac{1}{r}.$$

平面截距式为 $ux+vy+wz=1$，过 M 给出

$$u+v+\frac{2}{3}w=1. \tag{1}$$

四面体可写成 $x,y,z\ge 0,\ ux+vy+wz\le 1$．若内切球半径为 ρ，由于三个坐标面均为面，球心必为 (ρ,ρ,ρ)．球心到斜面的距离等于 ρ，于是

$$\rho=\frac{1}{u+v+w+\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \tag{2}$$

令 $s=u+v$，由 (1) 得 $w=\frac{3}{2}(1-s)$，其中 $0<s<1$．由柯西不等式，$u^2+v^2\ge s^2/2$，等号当且仅当 $u=v$．因此 (2) 的分母不小于

$$f(s)=\frac{3-s+\sqrt{11s^2-18s+9}}{2}. \tag{3}$$

令 $s_0=\frac{45+3\sqrt{5}}{55}$，并记 $H=11s^2-18s+9$、$L=11s-9+6\sqrt{5}$．在 $0<s<1$ 上 $L>0$，且恒等式

$$121H-L^2=1210(s-s_0)^2$$

给出 $\sqrt{H}\ge L/11$．代入 (3)，得

$$f(s)\ge\frac{3-s+L/11}{2}=\frac{3(4+\sqrt{5})}{11}.$$

当 $s=s_0$ 且 $u=v=s_0/2$ 时取等号，并且 $w=\frac{3}{2}(1-s_0)>0$，故最大半径确实达到．由 (2)，

$$\rho_{\max}=\frac{11}{3(4+\sqrt{5})}=\frac{4-\sqrt{5}}{3}.$$

对应的截距为 $p=q=(15-\sqrt{5})/6$、$r=(20+6\sqrt{5})/3$；题目给的是射线，截距超过线段端点并不构成限制．

7. 设抛物线 $C:y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，准线为 $l:x=-1$，点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$（$y_2>y_1\ge 0$）在 C 上，直线 AB 与 l 交于点 M，且 A 是 BM 的中点．若 $\angle MFB=\frac{2\pi}{3}$，点 A 的坐标为

解答. 由准线为 $x=-1$ 知 $p=2$，故抛物线为 $y^2=4x$，焦点 $F=(1,0)$．用参数表示

$$A=(t^2,2t),\qquad B=(s^2,2s),\qquad s>t\ge 0.$$

由 $M=2A-B$ 且 $x_M=-1$，得

$$s^2=2t^2+1. \tag{4}$$

记 $d=s-t$、$u=s+t$．由 (4) 有 $du=t^2+1$．又

$$\overrightarrow{FM}=(-2,2(2t-s)),\qquad \overrightarrow{FB}=(2t^2,2s),$$

且 $|FB|=2(t^2+1)$．将夹角条件写成内积，得到

$$2d^2=(t^2+1)\sqrt{1+(2t-s)^2}.$$

换成 u,d 并平方，结合 (4) 化为

$$u^2-6ud+d^2+4=0,\qquad 16d^2=u^2\big(4+(u-3d)^2\big).$$

令 $r=d/u$，消去 u 得 $r^2-6r+3=0$．由 $u,d>0$ 及上式可取 $r=3-\sqrt{6}$，进而 $u^2=2$．所以 $u=\sqrt{2}$、$d=\sqrt{2}(3-\sqrt{6})$，即

$$t=\sqrt{3}-\sqrt{2},\qquad A=(t^2,2t)=(5-2\sqrt{6},\,2\sqrt{3}-2\sqrt{2}).$$

8. 设点 $A(0,0), B(2026,0), C(t,2026)$（$t\in\mathbb{R}$）．记 D 为使 $ABCD$ 成平行四边形的第四个顶点．若 $N(t)$ 表示平行四边形 $ABCD$ 内部（不含边界）的整点（横、纵坐标都是整数的点）的个数，则函数 $N(t)$ 的函数值域中元素个数为

解答． 取内部格点的纵坐标 $y=1,\dots,2025$．在高度 y 处，平行四边形的横截面为

$$\frac{ty}{2026}<x<2026+\frac{ty}{2026}.$$

若 $ty/2026$ 为整数，该行有 2025 个整数点；否则有 2026 个．令 q 为 $t/2026$ 的最简分数的分母（无理数可视为 $q=\infty$），则被扣除的行数为 $\lfloor 2025/q\rfloor$，从而

$$N(t)=2026\cdot 2025-\left\lfloor\frac{2025}{q}\right\rfloor. \tag{5}$$

当 q 遍历正整数及 ∞ 时，$\lfloor 2025/q\rfloor$ 的不同取值共有 90 个：正值有 $2\lfloor\sqrt{2025}\rfloor-1=89$ 个，再加上 0．因此

$$90.$$

这里按题面将 t 视为实参数；若另加“t 为整数”，值域会改变，需另行计算．

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9. **（本题满分 16 分）**在三角形 ABC 中，D,E 在边 BC 上，AD,AE 是 $\angle BAC$ 的三等分线．若 $DE:BD:CE=1:2:3$，求 $\tan B\tan C$．

解答． 以下按手写图的点序 $B-D-E-C$ 处理．令 $A=3\theta$，$b=AC, c=AB$．对从 AB 起始、与 AB 成角 φ 的射线，设交 BC 于 X，正弦定理给出

$$\frac{BX}{XC}=\frac{c\sin\varphi}{b\sin(A-\varphi)}. \tag{6}$$

因此

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{2b\cos\theta}=\frac{1}{2},\qquad \frac{BE}{EC}=\frac{2c\cos\theta}{b}=1.$$

两式联立得 $c/b=\cos\theta$ 及 $2\cos^2\theta=1$，故 $\theta=\pi/4$、$A=3\pi/4$、$c/b=1/\sqrt{2}$．于是 $B+C=\pi/4$ 且 $\sin C/\sin B=1/\sqrt{2}$．令 $B=\pi/4-C$，则

$$\sqrt{2}\sin C=\sin(\pi/4-C)=\frac{\cos C-\sin C}{\sqrt{2}},$$

所以 $\tan C=1/3$、$\tan B=1/2$，从而

$$\tan B\tan C=\frac{1}{6}.$$

说明．题面文字未规定 D,E 的先后．若采用 $B-E-D-C$，同样计算得到 $A=\pi/2$、$\tan B\tan C=1$；因此严格按文字题面答案不唯一，手写图的点序是得到 $1/6$ 的必要约定．

10. **（本题满分 20 分）**已知椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左右顶点分别为 A_1,A_2，过椭圆 C 上一点 $P=(2,\sqrt{3})$ 作两条相互垂直的弦 PA,PB，分别以 PA,PB 为直径作圆，其相交于点 Q，求 $\triangle QA_1A_2$ 面积的取值范围．

解答．因为 $PA\perp PB$，所以 P,A,B 不共线，即直线 AB 不经过点 $P=(2,\sqrt{3})$．因此，直线 AB 的一般方程 $a(x-2)+b(y-\sqrt{3})+c=0$ 中有 $c\neq 0$．方程两边同除以 $-c$，可将其写成

$$m(x-2)+n(y-\sqrt{3})=1.$$

令

$$X=x-2,\qquad Y=y-\sqrt{3},$$

即 $x=X+2$，$y=Y+\sqrt{3}$．将其代入椭圆方程 $x^2+4y^2=16$，展开得

$$(X+2)^2+4(Y+\sqrt{3})^2=16,$$

整理为

$$X^2+4Y^2+4X+8\sqrt{3}Y=0.$$

在直线 AB 上有 $mX+nY=1$，代入上式，得到直线 PA, PB 的方程

$$(4m+1)X^2+(4n+8\sqrt{3}m)XY+(8\sqrt{3}n+4)Y^2=0.$$

对于过原点的两条直线，若其二次齐次方程为 $aX^2+bXY+cY^2=0$，则两直线垂直的条件为 $a+c=0$．由于 $PA\perp PB$，故

$$(4m+1)+(8\sqrt{3}n+4)=0,\qquad 4m+8\sqrt{3}n=-5.$$

于是直线 AB 恒过定点

$$R=\left(\frac{6}{5},-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),$$

因为

$$m\left(\frac{6}{5}-2\right)+n\left(-\frac{3\sqrt{3}}{5}-\sqrt{3}\right)=1.$$

点 Q 在以 PA 为直径的圆上，所以 $PQ\perp AQ$；同理，$PQ\perp BQ$．因此 A,Q,B 三点共线，从而 Q 在直线 AB 上．又因为 R 也在直线 AB 上，所以

$$PQ\perp QR,$$

即 Q 在以 PR 为直径的圆上．反过来，该圆上除 P 外的点均可由相应的直线 AB 取得．
以 PR 为直径的圆的方程为

$$\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)^2=\frac{52}{25}.$$

故

$$\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{13}}{5}\le y_Q\le\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{13}}{5}.$$

椭圆的左右顶点为 $A_1=(-4,0)$，$A_2=(4,0)$，所以

$$[\triangle QA_1A_2]=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot|y_Q|=4|y_Q|.$$

上述圆与 x 轴相交，故最小面积 0 可以取得；最大面积在 y_Q 取最大值时取得．因此

$$0\le[\triangle QA_1A_2]\le\frac{4\sqrt{3}+8\sqrt{13}}{5}.$$

11. **（本题满分 20 分）**可重集

$$V_0=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}.$$

一次变换操作为：从当前多重集中任取三个不同向量 x,y,z，删去它们并加入

$$\frac{-x+y+z}{2},\quad\frac{x-y+z}{2},\quad\frac{x+y-z}{2},\quad\frac{x+y+z}{2}.$$

令 V_n 为操作 n 次后的集合，$S_n=\sum_{v\in V_n}|v|v$．证明 $|S_n|<3\sqrt{5}$.
解答. 记 $M_n=\sum_{v\in V_n}vv^{\mathsf{T}}$．四个符号向量 $(-,+,+),(+,-,+),(+,+,-),(+,+,+)$ 的两两坐标乘积和为 0，每个坐标平方和为 4，所以一次替换保持二阶矩：

$$M_{n+1}=M_n.$$

直接计算

$$M_0=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}=2I+J.$$

于是 $\operatorname{tr}M_n=9$，且对单位向量 u 有

$$u^{\mathsf{T}}M_nu=2+(u_1+u_2+u_3)^2\le 5. \tag{9}$$

令 $r_v = |v|$. 由柯西不等式,

$$u \cdot S_n = \sum_v r_v (u \cdot v) \le \left(\sum_v r_v^2 \right)^{1/2} \left(\sum_v (u \cdot v)^2 \right)^{1/2} = 3\sqrt{u^{\mathsf{T}} M_n u} \le 3\sqrt{5}.$$

取 $u = S_n/|S_n|$ 即得 $|S_n| \le 3\sqrt{5}$. 还需排除等号. 若等号成立, 则 $u = \pm(1,1,1)/\sqrt{3}$, 且柯西等号条件对每个 $v = (a,b,c)$ 给出

$$3(a+b+c)^2 = 5(a^2+b^2+c^2). \tag{10}$$

所有向量坐标均为有理数. 若存在非零有理解, 清分母并约去最大公因数, 得本原整数解 A, B, C. 记 $s = A + B + C, Q = A^2 + B^2 + C^2$, 则 $3s^2 = 5Q$. 模 5 先得 $s \equiv 0$, 再得 $Q \equiv 0$. 代入 $C \equiv -A - B$, 有

$$A^2 + AB + B^2 \equiv 0 \pmod 5.$$

该二次式在 $\mathbb{F}_5$ 中只有零解 (其判别式 $-3 \equiv 2$ 不是平方), 故 $5 \mid A, B, C$, 与本原性矛盾. 而 $\operatorname{tr} M_n = 9$ 保证 V_n 中存在非零向量, 等号不可能. 因此

$$|S_n| < 3\sqrt{5}.$$

二试

I. **(本题满分 40 分)** 设 $n \ge 3$ 为正整数, $a_1, \ldots, a_n$ 为正实数. 黑板上写着乘积

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

已知将其中任意一个乘号替换为加号都会使表达式的值增加. 证明: 将所有的乘号都替换为加号也会使表达式的值增加.

解答. 记 $P = \prod_{j=1}^n a_j$, 并令 $x_j = 1/a_j$. 第 i 个乘号改成加号的条件为

$$\prod_{j \le i} a_j + \prod_{j > i} a_j > P.$$

除以 P 后得到

$$\prod_{j \le i} x_j + \prod_{j > i} x_j > 1 \qquad (1 \le i < n). \tag{1}$$

我们证明引理: 若正数 $x_1, \ldots, x_m$ 满足 (1), 则

$$L_m := \sum_{k=1}^m \prod_{j \ne k} x_j > 1. \tag{2}$$

当 $m = 2$ 时, (2) 正是 $x_1 + x_2 > 1$. 设 $m \ge 3$, 令

$$c = x_1 x_2, \qquad R = \prod_{j=3}^m x_j, \qquad U = \sum_{k=3}^m \frac{cR}{x_k}.$$

序列 $(c, x_3, \ldots, x_m)$ 的切分条件正好对应原条件的第 2 至第 $m-1$ 个, 归纳假设给出 $R + U > 1$. 另一方面

$$L_m = (x_1 + x_2)R + U.$$

若 $x_1 + x_2 \ge 1$, 则 $L_m \ge R + U > 1$. 若 $x_1 + x_2 < 1$, 由原条件的第一个切分得 $x_1 + x_2 R > 1$. 又 $x_2 < 1 - x_1$, 所以 $R > (1 - x_1)/x_2 > 1$, 从而

$$L_m \ge (x_1 + x_2)R = x_1 R + x_2 R > x_1 + (1 - x_1) = 1.$$

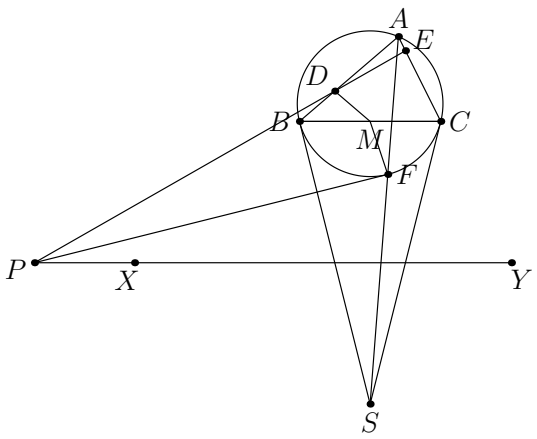
引理得证. 最后

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{P} = \sum_{k=1}^n \prod_{j \ne k} x_j = L_n > 1,$$

故

$$\sum_{k=1}^n a_k > \prod_{k=1}^n a_k.$$

II. **（本题满分 40 分）**如图，ω 为三角形 ABC 的外接圆，B,C 处的切线交于 S，直线 AS 再交 ω 于 F．M 为 BC 的中点，$D\in AB, E\in AC$，满足 $BD=DM, CE=EM$．直线 ED 与 MF 的垂直平分线交于 P．过 P 作 BC 的平行线交 AB,AC 于 X,Y．证明 A,X,S,Y 四点共圆．（答题时将图画在答题卷上.）



解答. 作相似变换令

$$B=(-1,0),\quad C=(1,0),\quad M=(0,0),\quad A=(u,v),$$

其中 $v\neq 0$．记 $n=u^2+v^2$、$K=1-n$、$h=1-u^2$．外接圆方程为

$$\omega:\quad x^2+y^2+\frac{K}{v}y-1=0. \tag{3}$$

由两条切线方程直接得到

$$S=\left(0,\frac{2v}{K}\right),\qquad F=\left(\frac{u}{n},-\frac{v}{n}\right). \tag{4}$$

等距条件可用垂直平分线表示．$BD=DM$ 说明 D 在 BM 的垂直平分线上，故

$$D=\left(-\frac{1}{2},\frac{v}{2(1+u)}\right);$$

同理

$$E=\left(\frac{1}{2},\frac{v}{2(1-u)}\right).$$

于是

$$ED:\quad 2hy=v(1+2ux). \tag{5}$$

由 (4)，MF 的垂直平分线为

$$ux-vy=\frac{1}{2}. \tag{6}$$

联立 (5)、(6)：由 $2ux=1+2vy$ 得 $hy=v(1+vy)$，即

$$y_P=\frac{v}{K}. \tag{7}$$

因此过 P 的平行线为 $y=vr$，其中 $r=1/K$．它与 AB,AC 的交点为

$$X=(-1+(u+1)r,vr),\qquad Y=(1+(u-1)r,vr). \tag{8}$$

过 A,X,Y 的圆可写成

$$\Gamma:\quad x^2+y^2-2ur\,x+\beta y+\gamma=0,$$

因为 $x_X+x_Y=2ur$．将 A,X 代入并相减，结合 $n=u^2+v^2$ 得

$$\beta v=K-rL,\qquad \gamma=-n+2u^2r-\beta v,\qquad L=1-u^2+v^2. \tag{9}$$

把 S 代入并整理，利用恒等式

$$2u^2K-(1+n)L=-(K^2+4v^2),$$

可得

$$\Gamma(S)=\frac{K^2+4v^2}{K^2}(1-Kr)=0,$$

其中最后一步用了 $r=1/K$. 故 $S\in\Gamma$, 从而

所以A,X,S,Y 共圆.

III. **（本题满分 50 分）**求所有整数 a, 使得存在无穷多个正整数 n, 满足 $n\mid\varphi(n)!+a$.

解答. 先证 $a=0,1$ 确实可行. $a=1$ 时取任意素数 p, 由 Wilson 定理 $p\mid(p-1)!+1$. $a=0$ 时取 $n=2^k$ $(k\geq 3)$, 因为

$$v_2\big((2^{k-1})!\big)=2^{k-1}-1\geq k,$$

所以 $2^k\mid\varphi(2^k)!$.

下面设 $a\neq 0$, 证明只能有 $a=1$. 令 P 为 n 的最大素因子. 若 $P>\varphi(n)$, 写 $n=P^em$ 且 $(P,m)=1$. 当 $P\geq 3,e\geq 2$ 时, $\varphi(n)\geq P(P-1)>P$, 矛盾; 故 $e=1$, 并由 $(P-1)\varphi(m)<P$ 得 $\varphi(m)=1$, 即 $m=1$ 或 2. 当 $P=2$ 时只有 $n=2$. 所以例外情形只有素数 P、$2P$（P 为奇素数）以及小的 $n=2$.

对非例外的 n, 有 $P\leq\varphi(n)$, 故每个素因子 $q\mid n$ 都整除 $\varphi(n)!$, 从而 $q\mid a$. 设 S 为 a 的素因子集合. 因此非例外解的全部素因子都在有限集 S 中. 若 $S=\varnothing$, 这类 n 只有 1; 若 $S\neq\varnothing$, 令

$$c=\prod_{q\in S}\left(1-\frac{1}{q}\right)>0,\qquad Q=\max S.$$

对 S-光滑的 n 有 $\varphi(n)\geq cn$. 若 $q^e\|n$, 则 $e\leq\log_2 n$, 并且

$$v_q(\varphi(n)!)\geq\left\lfloor\frac{\varphi(n)}{q}\right\rfloor\geq\frac{cn}{Q}-1.$$

当 n 足够大时, 右边超过 $\log_2 n$, 故每个 q^e 都整除 $\varphi(n)!$, 即 $n\mid\varphi(n)!$. 原条件再给出 $n\mid a$, 这与大于 $|a|$ 矛盾. 所以非例外解只有有限个.

若解有无穷多个, 只能有无穷多个例外解, 因而有无穷多个素数 P 使 $n=P$ 或 $n=2P$. 这两种情形都满足 $\varphi(n)=P-1$; 模 P 使用 Wilson 定理得

$$0\equiv(P-1)!+a\equiv a-1\pmod P.$$

无穷多个素数整除固定整数 $a-1$, 只能是 $a-1=0$. 综上

$$a\in\{0,1\}.$$

IV. **（本题满分 50 分）**给定一个 25×26 的长方形点阵, 每个点上各有一枚筹码. 可以重复执行以下操作: 首先选择任意三个不同的共线点, 然后从外侧的两个点中各移动一枚筹码到中间点; 只有当外侧两个点都有筹码时才能执行此操作, 中间点允许为空. 求操作次数的最大值.

解答. 先用一维引理. 在一行 n 个点上每点一枚棋子, 记最大操作数为 $g(n)$, 则

$$g(2k)=2(2^k-k-1),\qquad g(2k+1)=3\cdot 2^k-2k-3.\tag{10}$$

证明如下. 对 $2k+1$ 个点, 以中心为 c, 给距离 d 的点权

$$w_0=0,\qquad w_d=3\cdot 2^{d-2}-1\quad(1\leq d\leq k);$$

对 $2k$ 个点, 以中间两个点为中心, 给距离 d 的点权 $w_d=2^d-1$（$0\leq d\leq k-1$）. 对任意三点 $i<j<l$, 由对称性及递推 $w_{d+1}=2w_d+1$ 可逐段验证

$$w(i)+w(l)-2w(j)\geq 1.\tag{11}$$

一次操作使总势减少左端权加右端权减两倍中点权, 故至少减少 1. 初始总势分别为

$$2\sum_{d=1}^{k-1}(2^d-1)=2(2^k-k-1),$$

以及

$$2\sum_{d=1}^{k}\left(3\cdot 2^{d-2}-1\right)=3\cdot 2^{k}-2k-3,$$

所以这是上界.

上界可达：反向执行“从中点取两枚棋子，分别放到三个点的两端”的拆分操作．奇数行中，设中心逆操作为 C，左右第 d 壳层的两次逆操作为 P_d，定义

$$Q_1=C^2P_1,\qquad Q_d=Q_{d-1}^2P_d.$$

从中心的 $2k+1$ 枚棋子开始，依次执行 $Q_{k-1},\dots,Q_1,C$，即可得到每点一枚；并且 $|Q_d|=3\cdot 2^d-2$，总操作数正是第二个式子．偶数行对中间两个点作同样的二进制拆分，得到第一个式子．故一维引理成立.

现在给矩形点 (i,j) 赋势

$$W(i,j)=v_i+u_j,$$

其中 v_i 是 25 点奇数行的权，u_j 是 26 点偶数行的权．水平三点操作由 (11) 至少降低 1，竖直三点同理；斜向三点的两个坐标都发生变化，势至少降低 2．初始总势为

$$26g(25)+25g(26)=26(12261)+25(16356)=727686. \tag{12}$$

所以操作次数不超过 727686.

先在每一列按 25 点奇数行的一维最优序列操作，把该列的 25 枚棋子集中到中间行，共 $26g(25)$ 次；此时中间行每个点有 25 枚棋子．再沿中间行把 26 点偶数行的最优序列整体重复 25 次，共 $25g(26)$ 次．达到 (12)，故最大次数为

$$727686.$$

2 yfd-02

一、填空题： 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 设 $p,q\in\mathbb{R}_+$, 且
$$\log_9 p=\log_{12} q=\log_{16}(p+q),$$
则 $\dfrac{q}{p}=$_____.
解答. 设公共值为 t. 由换底公式
$$\frac{\ln p}{2\ln 3}=\frac{\ln q}{2\ln 2+\ln 3}=\frac{\ln(p+q)}{4\ln 2}=t.$$
从前两项消去 t, 并与第三项比较, 得
$$2\ln q-\ln p=\ln(p+q),\qquad q^2=p(p+q).$$
令 $r=q/p>0$, 则 $r^2-r-1=0$, 故
$$r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. 设正整数数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 满足
$$a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n,\qquad a_6=280,$$
则 $a_7=$_____.
解答. 递推式给出
$$a_6=55a_2-21a_1=280,\qquad a_7=144a_2-55a_1.$$
模 21 及模 55 分别考察上式, 得 $a_1=5+55t, a_2=7+21t$（$t\in\mathbb{Z}$）. 正性及 $a_1\le a_2$ 迫使 $t=0$, 所以
$$a_7=144\times 7-55\times 5=733.$$

3. 已知直线 PA,PB 分别与半径为 1 的 $\odot O$ 相切于 A,B,$|PO|=2$, 且
$$\overrightarrow{PM}=2\lambda\overrightarrow{PA}+(1-\lambda)\overrightarrow{PB}.$$
若 M 在圆内（不含边界）, 求 λ 的取值范围.
解答. 取坐标 $O=(0,0),P=(2,0),A=(\frac12,\frac{\sqrt3}{2}),B=(\frac12,-\frac{\sqrt3}{2})$, 并令 W 满足 $\overrightarrow{PW}=2\overrightarrow{PA}$, 则 $W=(-1,\sqrt3)$. 于是 $|BW|=3$, 而直线 BW 与圆的另一交点到 B 的距离为 2. 点 M 在 BW 上且 $BM=\lambda|BW|$, 故 M 在圆内当且仅当
$$0<3\lambda<2,\qquad \text{即}\qquad 0<\lambda<\frac{2}{3}.$$

4. 在半径为 R 的球内作内接圆柱, 求内接圆柱表面积的最大值.
解答. 设圆柱底面半径为 $R\sin\alpha$, 半高为 $R\cos\alpha$, 其中 $0<\alpha<\pi/2$. 表面积
$$\begin{aligned}S&=2\pi R^2\sin^2\alpha+4\pi R^2\sin\alpha\cos\alpha\\&=\pi R^2\big(1-\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\big)\\&\le\pi R^2(1+\sqrt5).\end{aligned}$$
当 $\tan 2\alpha=-2$ 且 $2\alpha\in(\pi/2,\pi)$ 时取等号, 故最大值为 $\pi R^2(1+\sqrt5)$.

5. 设 F 为双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点, 在 x 轴上 F 的右侧取点 A. 以 FA 为直径的圆与双曲线左、右两支在 x 轴上方的交点分别为 M,N, 求
$$\frac{|FN|-|FM|}{|FA|}.$$
解答. 记双曲线的半长轴、半短轴和焦半距分别为 $a=2,b=\sqrt3,c=\sqrt7$, 故左焦点 $F=(-c,0)$. 设 $A=(t,0)$ $(t>-c)$, 并记 $L=t+c=|FA|$. 圆的方程为 $(x+c)(x-t)+y^2=0$. 与双曲线方程联立, 消去 y^2 得交点横坐标 x_M,x_N 满足
$$c^2x^2+a^2(c-t)x-a^2(ct+b^2)=0,\qquad x_M+x_N=\frac{a^2(t-c)}{c^2}.$$

双曲线焦点距离公式给出（左支取负号, 右支取正号）

$$|FN| = \frac{c}{a}x_N + a, \qquad |FM| = -\frac{c}{a}x_M - a.$$

因此

$$|FN| - |FM| = \frac{c}{a}(x_M + x_N) + 2a = \frac{a}{c}(t + c) = \frac{a}{c}|FA|.$$

所求比值为

$$\frac{a}{c} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

6. 甲、乙、丙三人连续抛掷同一枚硬币, 直到出现“正反反”“正正反”或“反反正”. 三种情形分别由甲、乙、丙获胜. 三人中获胜概率最大者获胜的概率为_____.

解答. 设末两次结果为“正反”“反正”时甲获胜的条件概率分别为 P_1, P_2. 状态转移给出

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_2, \qquad P_2 = \frac{1}{2}P_1,$$

故 $P_1 = 2/3, P_2 = 1/3$. 从初始的四种末两次状态计算, 甲、乙、丙的获胜概率分别为 $1/4, 1/2, 1/4$, 最大者为乙, 所求概率为

$$\frac{1}{2}.$$

7. 已知实数 a, b, c 满足

$$\max_{x\in[-1,1]} |ax^2 + bx + c| = 1,$$

求 $\max_{x\in[-1,1]} |cx^2 + bx + a|$ 的最大可能值.

解答. 由 $x = 0, \pm 1$ 得 $|c| \le 1$ 且 $|a + c \pm b| \le 1$. 因此 $|a + c + bx| \le 1$（它是端点值均不超过 1 的线性函数）, 从而

$$|cx^2 + bx + a| = |(a + c + bx) + c(x^2 - 1)| \le 1 + 1 = 2.$$

取 $(a, b, c) = (2, 0, -1)$, 原多项式为 $2x^2 - 1$, 变式为 $2 - x^2$, 最大值达到 2.

8. 若一个正整数与其倒序数之和的每一位数字均为奇数, 则称其为小猿数. 求 11 位小猿数的个数.

解答. 设原数各位为 $a_1a_2\cdots a_{11}$, 从个位向高位作加法, 记第 i 对对应数字之和为 $s_i = a_i + a_{12-i}$, 进位为 d_i. 要求结果各位为奇数, 且 $d_0 = 0$, 于是进位交替为

$$d_1, d_2, \ldots, d_5 = 1, 0, 1, 0, 1,$$

中心位有 $2a_6 + d_5$, 故 a_6 有 5 种取法. 对于外层五对数字, 进位为 $0 \to 1$ 时须 s_i 为奇数且 $s_i \ge 10$, 可取数分别为 20 种; 进位为 $1 \to 0$ 时须 s_i 为偶数且 $s_i \le 8$, 可取 25 种. 首位非零的限制不改变第一类的 20 种计数, 因此总数为

$$20 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 5 = 25\,000\,000.$$

二、解答题：本大题共 3 小题, 满分 56 分.

9. 在三角形 ABC 中,a, b, c 分别为 A, B, C 的对边, 满足

$$(\sin B + \sin C)^2 = \sin^2(B + C) + 3\sin B \sin C, \qquad a = \sqrt{6}.$$

求周长最大值.

解答. 令 $u = \cos^2\frac{A}{2}$,$v = \cos^2\frac{B-C}{2}$. 利用 $A + B + C = \pi$ 化简题设得

$$(4u - 3)(u + v - 1) = 0.$$

因 $\sin B \sin C = u + v - 1 > 0$, 故 $u = 3/4$, 即 $A = \pi/3$. 由正弦定理 $a/\sin A = 2\sqrt{2}$, 从而

$$b + c = 2\sqrt{2}(\sin B + \sin C) = 4\sqrt{2}\sin\frac{B + C}{2}\cos\frac{B - C}{2} \le 2\sqrt{6}.$$

故周长最大值为 $3\sqrt{6}$, 且 $B = C = \pi/3$ 时取到.

10. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的弦 AB 过焦点 $F(1,0)$, 三角形 AOB 的外接圆再交抛物线于 $P \neq O, A, B$. 若 PF 平分 $\angle APB$, 求 $|PF|$ 的所有可能值.

解答. 采用参数点 $X(t) = (t^2, 2t)$. 设 $A = X(u), B = X(v), P = X(w)$. 弦 AB 过 F 给出 $uv = -1$; 过原点的外接圆与抛物线的交点参数满足根和为零, 故 $u + v + w = 0$. 角平分线定理及弦长公式化简为

$$(u^4 - 1)(u^8 - 11u^4 + 1) = 0.$$

前一因子对应 $P = O$, 不合题意; 后一因子给出 $u^4 + u^{-4} = 11$. 而 $w = u^{-1} - u$, 故

$$|PF| = w^2 + 1 = u^2 + u^{-2} - 1 = \sqrt{13} - 1.$$

11. 已给定 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|} \geq 1 \right\},$$

其面积为 A. 证明 $A \geq \dfrac{\pi}{12}(11n^2 + 1)$.

解答. 记 $c = (n+1)/2$. 柯西不等式给出

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{n} |z-k|^2 \right) \geq n^3.$$

又

$$\sum_{k=1}^{n} |z-k|^2 = n \left(|z-c|^2 + \frac{n^2-1}{12} \right).$$

当 $|z-c|^2 \leq (11n^2+1)/12$ 时, 右端不超过 n^3, 故该圆盘包含于 M. 比较面积即得

$$A \geq \pi \frac{11n^2 + 1}{12}.$$

二试（加试）.

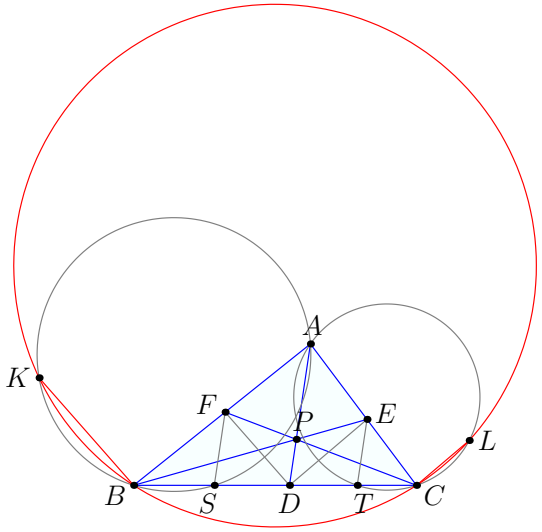
一、 给定 $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, 证明

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(a_i - a_{i-1})| \leq \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})^2.$$

解答. 令 $b_i = a_i - a_{i-1}$, 则 $a_i = \sum_{j=1}^{i} b_j$. 于是

$$\begin{aligned} \sum_i |a_i b_i| &\leq \sum_i |b_i| \sum_{j \leq i} |b_j| \\ &= \frac{1}{2} \sum_i |b_i|^2 + \sum_{j<i} |b_i||b_j| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_i b_i^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_i |b_i| \right)^2 \\ &\leq \frac{n+1}{2} \sum_i b_i^2. \end{aligned}$$

二、 设 P 为 $\triangle ABC$ 内部一点,AP, BP, CP 分别交对边于 D, E, F; $S, T \in BC$ 且 AD, FS, ET 两两平行.K, L 分别在 $\triangle ABS, \triangle ACT$ 的外接圆上, 且 $BK \parallel DF, CL \parallel DE$. 证明 K, B, C, L 四点共圆.



解答. 以有向角表示, 先由相似三角形及平行线得到

$$\frac{\sin\angle CBK}{\sin\angle ABK}=\frac{BT}{CS}\cdot\frac{AB}{AC},\qquad \frac{\sin\angle ACL}{\sin\angle BCL}=\frac{CS}{BT}\cdot\frac{AC}{AB}.$$

两式相乘为 1, 故

$$\frac{\sin\angle CBK}{\sin\angle ABK}\frac{\sin\angle ACL}{\sin\angle BCL}=1.$$

这正是四点 K,B,C,L 共圆的正弦形式判据, 结论成立.

三、 求全体有序正整数对 (A,B), 使

$$a_0=A,\qquad a_{n+1}=(n+B)\bmod(a_0+\cdots+a_n)$$

定义的数列有界.

解答. 结论为 $B\geq A$. 若 $B<A$, 则 $a_1=B$, 且归纳可得 $a_{n+1}=n+B$, 故数列无界.

若 $B\geq A$, 记 $S_j=a_0+\cdots+a_j$ 及 $N_j=j+B$. 我们使用如下简单引理: 若 $S_0=A\leq N_0=B$ 且

$$S_{j+1}=S_j+(N_j\bmod S_j),\qquad N_{j+1}=N_j+1,$$

则存在 j 使 $S_j\leq N_j<2S_j$. 事实上若一直有 $N_j\geq 2S_j$, 令 $q_j=\lfloor N_j/S_j\rfloor\geq 2$, $r_j=N_j-q_jS_j$. 在 S_j 不变的连续阶段,N_j 每步增加 1, 余数 r_j 也每步增加 1, 故至多 $S_j/2$ 步便有 $r_j\geq S_j/2$ 并使 $S_{j+1}\geq 3S_j/2$; 重复这一过程, 在总步数小于 $2S_j$ 时得到 $S_j>N_j/2$, 与假设矛盾. 因此存在这样的 j, 于是

$$a_{j+1}=j+B-S_j,\qquad S_{j+1}=j+B,\qquad a_{j+2}=1.$$

此后 $S_{j+r}=j+B+r-1$ 且 $a_{j+r}=1$, 数列有界.

四、 S 为 20 元集合,$A_1,\ldots,A_{2k+1}$ 为互不相同的 7 元子集, 每个 A_i 恰与 k 个其他子集交集非空, 求 k 的最大值.

解答. 构造相交图 G: 顶点为 A_i, 相交即连边. 其补图 H 也是 k-正则图, 顶点数为 $2k+1$. 若 H 有三角形, 则对应三个两两不交的 7 元子集, 需要至少 21 个元素, 与全集大小 20 矛盾, 所以 H 三角形自由. 使用极值引理: 三角形自由的 k-正则图若有 $2k+1$ 个顶点, 则 $k\leq 2$; 证明可取最短奇圈, 当 $k\geq 3$ 时按圈上相邻点的邻域计数得到顶点数至少 $5k-5>2k+1$, 矛盾. 另由握手定理 $k(2k+1)$ 为偶数, 故 k 为偶数, 从而 $k\leq 2$.

下面构造 $k=2$. 取 20 个元素为 $p_1,\ldots,p_5$ 及 $e_{i,r}$（i 按模 5 计算,$r=1,2,3$）, 令

$$A_i=\{p_i\}\cup\{e_{i-1,r}:1\leq r\leq 3\}\cup\{e_{i,r}:1\leq r\leq 3\}.$$

每个 A_i 有 7 个元素, 只与 A_{i-1},A_{i+1} 相交, 故满足条件. 因此最大值为 2.

3 yfd-03

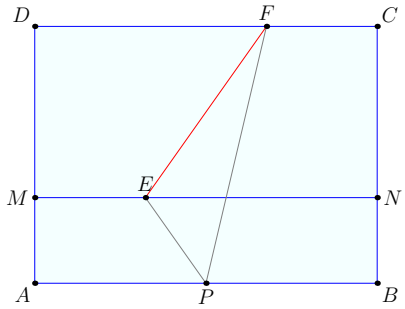
一、填空题：本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 在公比为 2 的等比数列 $\{a_n\}$ 中,a_2, a_3, a_4-4 成等差数列, 求 a_5.
   解答. 由 $2a_3 = a_2 + (a_4 - 4)$ 及 $a_3 = 2a_2, a_4 = 4a_2$, 得
   $$4a_2 = a_2 + 4a_2 - 4, \qquad a_2 = 4.$$
   故 $a_5 = 8a_2 = 32$.

2. 袋中有编号 $1, 2, \ldots, 10$ 的球, 随机取三球, 恰有一个编号为另一个编号两倍的概率.
   解答. 对 $d = 1, 2, 3, 4, 5$, 令 E_d 表示三球中含有 $d, 2d$. 每个 E_d 有 8 种取法, 共计 40 个关联数. 只有三元组 $\{1, 2, 4\}$ 与 $\{2, 4, 8\}$ 各被计算两次, 故有利取法数为 $40 - 2 = 38$. 总取法数为 $\binom{10}{3} = 120$, 所求概率为
   $$\frac{38}{120} = \frac{19}{60}.$$

3. 正实数 x, y 满足 $\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{x+y} = \log_{ab} y$, 求 x/y.
   解答. 设公共值为 t. 则
   $$x = a^{2t}, \qquad x + y = b^{2t}, \qquad y = (ab)^t.$$
   令 $r = x/y = (a/b)^t$, 将第二式除以第三式得 $r + 1 = 1/r$, 即 $r^2 + r - 1 = 0$. 因 $r > 0$, 故
   $$\frac{x}{y} = r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

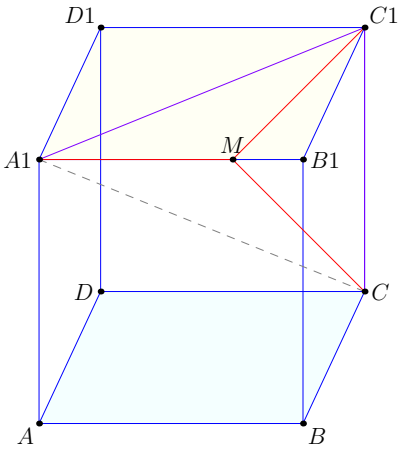
4. 在矩形 $ABCD$ 中,$AB = 4, AD = 3$, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $MN \parallel AB$. 若 $E \in MN, F \in CD$ 且 $|EF| = \sqrt{6}$, 求 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值.



   解答. 取 $A = (0, 0), B = (4, 0), C = (4, 3), D = (0, 3)$, 则 $P = (2, 0)$, $E = (u, 1), F = (v, 3)$, 其中 $0 \le u, v \le 4$. 条件 $|EF| = \sqrt{6}$ 化为 $(u - v)^2 = 2$. 于是
   $$\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF} = (u-2)(v-2) + 3.$$
   设 $d = u - v = \pm\sqrt{2}$, 则 $v = u - d$, 从而
   $$(u-2)(v-2) + 3 = (u-2)^2 - d(u-2) + 3 = \left(u - 2 - \frac{d}{2}\right)^2 + 3 - \frac{d^2}{4} \ge \frac{5}{2}.$$
   取 $u = 2 + d/2, v = 2 - d/2$ 时等号成立, 故最小值为 $5/2$.

5. 过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点的动直线交抛物线于 A, B, Q 为 AB 中点, P 为抛物线上任意点. 若 $|PF| + |PQ|$ 的最小值为 6, 求 p.
   解答. 设抛物线参数点为 $X(s) = (ps^2/2, ps)$. 过焦点的弦满足参数 $s_1 s_2 = -1$, 故
   $$x_Q = \frac{p}{4}(s_1^2 + s_2^2) \ge \frac{p}{2}.$$
   对任意抛物线上点 $P = (x_P, y_P)$, 由 $|PQ| \ge |x_P - x_Q|$ 得
   $$|PF| + |PQ| = x_P + \frac{p}{2} + |PQ| \ge x_Q + \frac{p}{2} \ge p,$$
   其中第一步用到了 $x_P + |x_P - x_Q| \ge x_Q$. 当 $s_1 = 1, s_2 = -1$ 时 $Q = F$, 再取顶点 $P = (0, 0)$, 等号可达. 故最小值为 p, 从而 $p = 6$.

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=CC_1=\sqrt{2},BC=1$, $M\in CDD_1C_1$ 且 $C_1M\perp$ 平面 A_1CM, 求三棱锥 $M-A_1CC_1$ 外接球表面积.



解答. 取

$$A=(0,0,0),\ B=(\sqrt{2},0,0),\ C=(\sqrt{2},1,0),\ A_1=(0,0,\sqrt{2}),\ C_1=(\sqrt{2},1,\sqrt{2}).$$

设 $M=(x,1,z)$. 由 $C_1M\perp A_1C$ 得 $x=z$; 再由 $C_1M\perp A_1M$ 得 $(x-\sqrt{2})(2x-\sqrt{2})=0$. 非退化情形取 $x=z=\sqrt{2}/2$, 故 $M=(\sqrt{2}/2,1,\sqrt{2}/2)$. 设外接球球心为 $O=(u,v,w)$. 由 $OC=OC_1$ 得 $w=1/\sqrt{2}$; 再由 $OA_1=OC$ 及 $OM=OC$ 解得

$$O=\left(\sqrt{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\qquad R^2=OC^2=\frac{11}{4}.$$

故外接球表面积为 $4\pi R^2=11\pi$.

7. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-1$, 在 $[t,t+3]$ 上最大、最小值为 $M(t),m(t)$, $g(t)=M(t)-m(t)$. 求 g 在 $[-3,-1]$ 上最小值.
解答. $f'(x)=x^2-1$. 当 $t\in[-3,-2]$ 时,f 在 $[-3,-1]$ 递增, 在 $[-1,t+3]$ 递减, 故最大值为 $f(-1)$; 又

$$f(t+3)-f(t)=3(t+1)(t+2)\geq 0,$$

故最小值为 $f(t)$, 且 $g(t)=f(-1)-f(t)\geq f(-1)-f(-2)=4/3$. 当 $t\in[-2,-1]$ 时, 区间含有 $x=1$ 和 $x=-1$, 而 $f(-1)=-1/3, f(1)=-5/3$ 分别为局部极大、极小; 两端点函数值均不小于 $f(1)$, 故 $g(t)=4/3$. 所以最小值为 $4/3$.

8. 用红、黄、蓝三色给正八面体八个面染色, 至少用两种颜色, 旋转后相同视为同一种, 求不同彩色正八面体个数.
解答. 正八面体的旋转群有 24 个元素. 将八个面视为立方体的八个顶点, 旋转的循环型及固定染色数为

$$1^8\ (1\text{ 个}),\qquad 4^2\ (6\text{ 个}),\qquad 2^4\ (17\text{ 个}).$$

Burnside 引理给出含单色的轨道数

$$\frac{3^8+6\cdot 3^2+17\cdot 3^4}{24}=333.$$

扣除三种单色, 得到 $333-3=330$.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分.

9. 在三角形 ABC 中,$2ac\sin A+a^2+c^2-b^2=0$. 求

$$\frac{4\sin^2 C+3\sin^2 A+2}{\sin^2 B}$$

的最小值及此时 B.
解答. 由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$, 题设化为 $\sin A+\cos B=0$. 因 $A,B\in(0,\pi)$ 且 $A+B<\pi$, 可得 $A=B-\pi/2$, 故 $B\in(\pi/2,3\pi/4)$ 且 $C=3\pi/2-2B$. 令 $s=\sin^2 B$, 则

$$\sin^2 A=1-s,\qquad \sin^2 C=(2s-1)^2,$$

从而原式为

$$16s-19+\frac{9}{s}\geq 2\sqrt{16\cdot 9}-19=5.$$

等号在 $s=3/4$ 取得; 因 B 为钝角, 此时 $B=2\pi/3$.

10. 对非零复数有限集 $A=\{z_1,\dots,z_n\}$ $(n\geq 3)$ 定义 $B(A)=\{z_iz_j : i<j\}$, 求所有满足 $A=B(A)$ 的集合.

解答. 当 $n=3$ 时, 三个两两乘积恰为 A, 将三式相乘得 $(z_1z_2z_3)^2=z_1z_2z_3$, 故 $z_1z_2z_3=1$. 因此 A 对倒数封闭且有一个不动点; 不动点不可能是 -1, 故

$$A=\{1,z,z^{-1}\},\qquad z\in\mathbb{C}^*\setminus\{1,-1\}.$$

当 $n\geq 4$ 时先证所有元素模长为 1。对固定 $x\in A$，乘法映射给出

$$x(A\setminus\{x\})=A\setminus\{x^{2-n}\}. \tag{1}$$

令 $L=\{\log|z| : z\in A\}$，按重数计。若 $\delta=\min L<0$，则 (1) 对应于

$$\delta+(L\setminus\{\delta\})=L\setminus\{(2-n)\delta\}. \tag{2}$$

平移 $t\mapsto t+\delta$ 的有向图只有一个出度为 0 的点 δ 和一个入度为 0 的点 $(2-n)\delta$；因 $\delta\neq 0$ 不可能出现有向环，故 (2) 强迫

$$L=\{(2-n)\delta,(3-n)\delta,\dots,\delta\}.$$

当 $n\geq 4$ 时其中最大的两个数均为正，且它们之和大于最大数；相应的两个不同元素的乘积模长将超过 A 中最大模长，矛盾。因此 $\min L\geq 0$。对 $-L$ 重复同样论证可得 $\max L\leq 0$，故 $L=\{0,\dots,0\}$，即 $A\subset\mathbb{S}^1$。

下面证明一个受限乘积引理。对固定 $x\in A$，记 $P=\prod_{u\in A}u$。将 (1) 两边各元素相乘，得到缺失元素

$$\phi(x)=x^{2-n}.$$

若 $1\notin A$，则 x 不在 $x(A\setminus\{x\})$ 中，故缺失元素为 x，即 $x^{n-1}=1$ 对所有 $x\in A$，这与 $X^{n-1}=1$ 至多有 $n-1$ 个根矛盾，故 $1\in A$。

再证逆元闭包. 若 $x^{-1}\notin A$, 则 1 不在 $x(A\setminus\{x\})$ 中, 故 $\phi(x)=1$ 且 $d=\operatorname{ord}(x)$ 满足 $d\mid n-2$. 乘法 $u\mapsto xu$ 除去 $u=x$ 外保持 A, 所以在循环子群 $H=\langle x\rangle$ 外的每个相交陪集都整包含于 A; 而 $H\cap A$ 含 $1,x$ 且不含 x^2（若有 x^2, 沿着 $u\mapsto xu$ 迭代便得到 x^{-1}）, 写 $|H\cap A|=h$, 由 $d\mid n-2$ 得 $h\equiv 2\pmod d$, 从而 $h=2$. 任取一个完整的外陪集 $gH\subset A$（它存在于 $n\geq 4$）. 由于 $d\geq 3$, 同一完整陪集内两个不同元素的乘积可以给出该陪集平方中的任意元素, 故 $g^2H\subset A$; 只要前一陪集尚未回到 H, 把当前陪集与 gH 相乘便得到下一个完整陪集, 所以有限性迫使存在最小正整数 q 使 $g^qH=H$（否则会在有限的 A 中得到无限多个互异的完整陪集）. 若 $q=2$, 写 $g^2=x^r$; 因 $d\geq 3$, 可取两个不同的指数 i,j 满足 $i+j\equiv 2-r\pmod d$, 于是 $(gx^i)(gx^j)=x^2\in A$; 若 $q\geq 3$, 从 gH 与 $g^{q-1}H$ 各取合适的两个代表, 其乘积同样可取为 x^2, 矛盾. 故 $x^{-1}\in A$.

有了 1 和逆元, 受限乘法已给出不同元素的乘积仍在 A. 若能取到避开 $x^{\pm1}$ 且非二阶的第三元素 z, 则 $xz\neq xz^{-1}$ 且

$$x^2=(xz)(xz^{-1})\in A.$$

若取不到这样的 z, 则 $A\subset\{1,-1,x,x^{-1}\}$; 因 $n\geq 4$ 必有等号. 此时 $-x=x(-1)\in A$, 而 $-x$ 不可能等于 ±1 或 x, 故 $-x=x^{-1}$, 从而 $x^2=-1\in A$. 因此 A 对任意乘法及逆元封闭, 是有限乘法子群.

有限子群均为单位根群, 故 $A=\mu_n=\{e^{2\pi ij/n} : 0\leq j<n\}$ $(n\geq 4)$. 反之,μ_n $(n\geq 3)$ 中每个元素都能写成两个不同元素的乘积, 故确实满足条件.

11. 直线 l 与椭圆 $x^2/2+y^2=1$ 交于 A,B, O 为原点. 若 l 使 $\triangle AOB$ 面积最大, 取 $l_1\parallel l_2, l_3\parallel l_4$ 且对应斜率和为 0, 求四线围成四边形面积范围.

解答. 设 $l: y=kx+m$. 将直线与椭圆联立, 弦三角形面积关于 m 的最大值由判别式配方取得, 等号条件为

$$m^2-k^2=\frac{1}{2}.$$

因此四条直线可写为

$$y=kx\pm h,\qquad y=-kx\pm h,\qquad h=\sqrt{k^2+\frac{1}{2}},\quad k>0.$$

它们构成平行四边形, 两组边间距分别为 $2h$ 与 $2h/k$, 故面积

$$S=\frac{4h^2}{k}=\frac{2k^2+1}{k}=2k+\frac{1}{k}\geq 2\sqrt{2}.$$

当 $k=1/\sqrt{2}$ 取下界, 且令 $k\to 0^+$ 或 $k\to+\infty$ 时 $S\to+\infty$, 故范围为 $[2\sqrt{2},+\infty)$.

二试（加试）.

一、 给定 2026 个实数 a_i 满足 $\sum a_i^2=1$ (循环下标), 求最大的 u 使

$$\sum a_ia_{i+2}-2\left(\sum a_ia_{i+1}\right)^2\geq u.$$

解答. 记 $X=\sum a_ia_{i+1}$,$Y=\sum a_ia_{i+2}$. 恒有

$$2\sum_i a_i(a_i+a_{i+2})=\sum_i(a_{i-1}+a_{i+1})^2.$$

由柯西不等式及 $\sum a_i^2=1$,

$$2+2Y=\sum_i(a_{i-1}+a_{i+1})^2\geq\left(\sum_i a_i(a_{i-1}+a_{i+1})\right)^2=4X^2.$$

故 $Y-2X^2\geq -1$. 取所有 $a_i=1/\sqrt{2026}$ 时等号成立, 所以 $u=-1$.

二、 给定正整数 $m<n$, 有 n 堆物品, 每堆 m 个; 每次从两堆共移除 n 个, 求可全部移除的 (m,n).

解答. 将每次操作视为连接被选两堆的多重图边, 边数恰为 m (总物品数为 mn). 图的每个顶点均非孤立. 对任一连通分支, 设顶点数为 v, 边数为 e, 对该分支求移除总量得

$$vm=en.$$

令 $d=(m,n)$. 于是 $n/d\mid v$. 另一方面连通图满足 $e\geq v-1$, 故

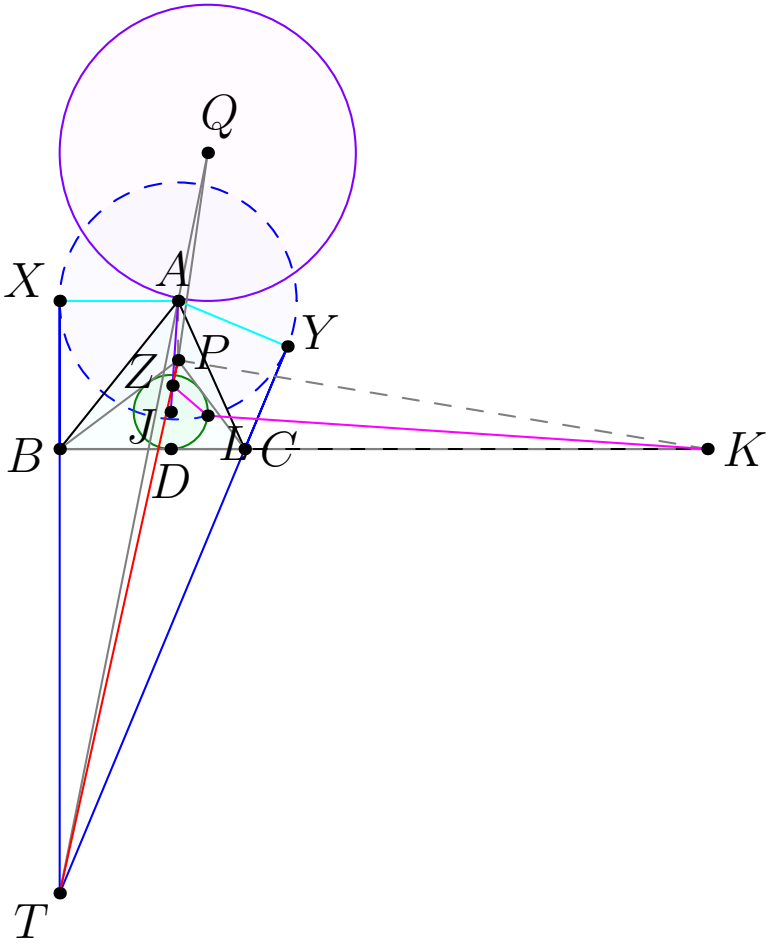
$$\frac{m}{n}v=e\geq v-1\quad\Longrightarrow\quad v\leq\frac{n}{n-m}.$$

结合 $v\geq n/d$ 得 $d\geq n-m$. 而 $d\mid(n-m)$, 故必有 $d=n-m$.

反之设 $n=d(a+1),m=da$. 将 n 堆分为 d 组, 每组 $a+1$ 堆排成路径. 在第 r 组的相邻两堆之间依次进行 a 次操作, 第 j 条边 (左端编号 j, $1\leq j\leq a$) 从两端分别移除 $d(a+1-j)$ 和 dj 个物品. 每条边共移除 $d(a+1)=n$ 个, 而路径上每个顶点恰好移除 $da=m$ 个, 故所有物品均可移除. 因此

$$(m,n)=(da,d(a+1)),\qquad a,d\in\mathbb{Z}_+.$$

三、 在锐角三角形 ABC 中, 点 P 满足 $AP\perp BC$; ω 为 $\triangle PBC$ 的内切圆, 圆心为 J, 与 BC 切于 D; $K\in BC$ 且 $KP=KD$. 点 X,Y,L,Z 按题面构造, 证明 PZ,BX,CY 三线共点.



解答. 令 $T = BX \cap CY$。以 A 为圆心、AX 为半径作圆 Γ_A。由题设可得 $AX = AY$，故 BX, CY 分别是 Γ_A 在 X, Y 处的切线，从而 $TX = TY$。结合 $BX = BP, CY = CP$，有

$$TB + BP = TX = TY = TC + CP.$$

由本构型的四线公切圆判定，直线 PB, BT, TC, CP 存在公切圆 Ω；记其圆心为 Q、半径为 r_Q。设 Γ_A, ω 的半径分别为 r_A, r_J。由两圆同切一个角的两边，得到

$$P, J, Q \text{ 共线}, \qquad T, A, Q \text{ 共线}, \qquad \frac{JP}{PQ} = \frac{r_J}{r_Q}, \qquad \frac{AT}{TQ} = \frac{r_A}{r_Q}. \tag{1}$$

又由 $KP = KD$ 可知点 K 对 Γ_A 与 ω 的幂相等；因 $KL \perp AJ$，故 KL 是两圆的根轴。于是 $L \in \Gamma_A \cap \omega$，即 $AL = r_A, JL = r_J$。在 $\triangle ALJ$ 中应用角平分线定理，得

$$\frac{AZ}{ZJ} = \frac{AL}{JL} = \frac{r_A}{r_J}. \tag{2}$$

由 (1)、(2)，在 $\triangle AJQ$ 中有

$$\frac{AZ}{ZJ} \cdot \frac{JP}{PQ} \cdot \frac{QT}{TA} = \frac{r_A}{r_J} \cdot \frac{r_J}{r_Q} \cdot \frac{r_Q}{r_A} = 1.$$

由梅涅劳斯定理的逆定理，P, Z, T 共线。又 $T \in BX \cap CY$，故 PZ, BX, CY 三线共点于 T。

四、 证明存在无穷多个正整数 m, 使恰有唯一正整数 n 满足 $\sigma(n) = m$.

解答. 设 $p_1, p_2, \ldots$ 为按递归选取的素数, 并令 $M_r = \prod_{i \le r}(p_i + 1)$. 按狄利克雷定理可取素数 $q_r \equiv 1 \pmod{M_r}$, 且大于此前所有数. 令 $m_r = q_r + 1$. 若 $\sigma(N) = m_r$ 且 $N \neq q_r$, 取 N 的最小素因子幂 $s^e \| N$. 由乘法性 $\sigma(N)$ 含因子 $\sigma(s^e) = 1 + s + \cdots + s^e$, 故其每个素因子均来自 m_r. 递归选择中 $q_r \equiv 1 \pmod{p_i + 1}$ 使这些因子只能落入此前的因子链, 再与 $q_r + 1$ 的新素因子比较即矛盾. 因此 $\sigma^{-1}(m_r) = \{q_r\}$, 且 m_r 两两不同, 得到无穷多个这样的 m.

说明. 递归选取素数时还需补充一个因子链引理：若 $\sigma(N) = q_r + 1$，则每个 $\sigma(s^e)$ 的素因子只能落在已选因子链中；该引理成立后即可排除 $N \neq q_r$ 的情形。

4 yfd-04

一、填空题： 本大题共 8 小题, 每小题 8 分, 满分 64 分.

1. 已知 A,B 是球 O 的球面上两点,$\angle AOB=90^\circ$,C 为球面上的动点. 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 $4/3$, 求球 O 的半径.

   解答. 取 OA,OB 为互相垂直的两条半径. 当 OC 垂直于平面 AOB 时体积最大, 且

   $$V_{\max}=\frac{1}{3}\cdot\frac{R^2}{2}\cdot R=\frac{R^3}{6}.$$

   由 $R^3/6=4/3$ 得 $R=2$.

2. 已知 $\sqrt{\log_b n}=\log_b\sqrt{n}$ 且 $b\log_b n=\log_b(bn)$, 求 b.

   解答. 令 $t=\log_b n$. 则 $\sqrt{t}=t/2$, 故 $t=0$ 或 $t=4$. 第二个等式为 $bt=1+t$, 排除 $t=0$ 后得 $t=4,b=5/4$.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=2$, 且对任意不相等正整数 m,n, 均存在 $k\in\mathbb{N}^*$ 使 $a_m+a_n=a_k$, 求 $a_1+\cdots+a_5$ 的最小值.

   解答. 设公差为 d. 由

   $$2+(m+n-1)d=a_k=2+(k-1)d$$

   得 $k=m+n-1+2/d$, 所以 $q=2/d$ 必须为整数. 当 $m+n=3$ 时还须 $q\geq -1$. 若 $q=-1$, 则 $d=-2$ 且 $k=m+n-2\geq 1$, 条件对所有 $m\neq n$ 成立, 此时前五项和为 -10. 若 $q\geq 1$, 则 $d=2/q>0$, 前五项和 $10+10d>10$. 故最小值为 -10.

4. 三角形 ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c, 满足

   $$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B},$$

   求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小可能值.

   解答. 半角公式给出 $\tan(\pi/4-A/2)=\tan B$. 由角的范围可知 $A+2B=\pi/2$, 从而 $C=\pi/2-B$ 且 $0<B<\pi/4$. 令 $s=\sin^2 B\in(0,1/2)$, 由正弦定理

   $$\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{(1-2s)^2+s}{1-s}=\frac{4s^2-3s+1}{1-s}.$$

   求导得极小点 $s=1-1/\sqrt{2}$, 代回得最小值 $4\sqrt{2}-5$.

5. 实数 x_1,x_2,y_1,y_2 满足 $x_1^2+y_1^2=4,x_2^2+y_2^2=9,x_1x_2+y_1y_2=0$, 求

   $$|x_1+y_1-4|+|x_2+y_2-9|$$

   的最大值.

   解答. 令 $u=(x_1,y_1),v=(x_2,y_2),e=(1,1)$. 由 $|e\cdot u|\leq 2\sqrt{2}<4$ 及 $|e\cdot v|\leq 3\sqrt{2}<9$, 原式恒等于 $13-e\cdot(u+v)$. 又 $u\perp v,|u|=2,|v|=3$, 故 $|u+v|=\sqrt{13}$. 于是

   $$13-e\cdot(u+v)\leq 13+|e|\,|u+v|=13+\sqrt{26}.$$

   旋转一组互相垂直且长度分别为 $2,3$ 的向量使 $u+v$ 与 e 反向可取等号, 最大值为 $13+\sqrt{26}$.

6. 平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$, $2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2=0$, 求 $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}|$ 的最大值.

   解答. 由条件得

   $$\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3,\qquad 2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2=0,$$

   从而 $2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=3$, 且 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2$. 故

   $$|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}|=|\vec{b}|+|\vec{a}|\leq\sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)(2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

   取 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$ 且满足点积条件时等号成立.

7. $A=\{x_1,\dots,x_5\}$ 为五元集合,$(a_1,\dots,a_6)$ 从 A 独立等概率抽取,f 为 A 上的随机排列. 求 $a_{i+1}\neq f(a_i)$ ($a_7=a_1$ 对所有 i) 的概率.

解答. 在总数 $5!\,5^6$ 个 $(f,(a_i))$ 中, 对任意真子集 $J\subsetneq\{1,\dots,6\}$, 事件 $a_{i+1}=f(a_i)$ ($i\in J$) 的交集计数为 $5!\,5^{6-|J|}$, 因为约束图是若干条不闭合的链. 六个事件全发生时,a_1 必须为 f^6 的不动点, 计数为

$$5!\sum_f \frac{\#\operatorname{Fix}(f^6)}{5!}=5!\cdot 3,$$

其中随机排列的 f^6 平均有 3 个不动点 (来自长度 $1,2,3$ 的循环). 容斥得

$$p=1-\binom{6}{1}\frac{1}{5}+\binom{6}{2}\frac{1}{5^2}-\binom{6}{3}\frac{1}{5^3}+\binom{6}{4}\frac{1}{5^4}-\binom{6}{5}\frac{1}{5^5}+\frac{3}{5^6}=\frac{4098}{15625}.$$

8. 非空 $S\subseteq\{-10,-9,\dots,10\}$ 满足 $|S|+\min(S)\max(S)=0$, 求不同集合 S 的个数.

解答. 单元素集合及全正、全负集合均不满足条件. 设 $\min S=-a,\max S=b$ ($1\le a,b\le 10$), 则 $|S|=ab$. 由于 $S\subseteq[-a,b]$,

$$ab\le a+b+1\quad\Longleftrightarrow\quad(a-1)(b-1)\le 2.$$

故只需考虑 $(a,b)=(1,k),(k,1),(2,2),(2,3),(3,2)$. 当 $(a,b)=(1,k)$ 时端点固定, 其余 $k-2$ 个元素从 k 个内部点中选, 有 $\binom{k}{k-2}$ 种; 对称情形同样. 另外三种分别有 $3,1,1$ 种. 总数

$$2\sum_{k=2}^{10}\binom{k}{k-2}+3+1+1=335.$$

二、解答题: 本大题共 4 小题, 满分 180 分.

9. 正实数递增数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\prod_{i=1}^{k}(a_i+a_{i+1})\le(2^k+2026)\prod_{i=1}^{k}a_i,\qquad a_{k+1}=a_1,$$

对所有 $k\ge 3$, 证明任意两项相等.

解答. 由单调性 $a_1\le\cdots\le a_k$, 对前 $k-1$ 个因子作均值不等式, 得

$$\frac{\prod_{i=1}^{k}(a_i+a_{i+1})}{\prod_{i=1}^{k}a_i}\ge 2^{k-1}\sqrt{\frac{a_k}{a_1}}\left(1+\sqrt{\frac{a_1}{a_k}}\right)=2^{k-1}\left(\sqrt{\frac{a_k}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_1}{a_k}}\right).$$

结合题设可得

$$\sqrt{\frac{a_k}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_1}{a_k}}\le 2+\frac{2026}{2^{k-1}}.$$

若存在 $a_m>a_1$, 则所有 $k\ge m$ 的左端均至少为固定的 $\sqrt{a_m/a_1}+\sqrt{a_1/a_m}>2$, 令 $k\to\infty$ 矛盾. 故 $a_k=a_1$ 对所有 k, 数列各项相等.

10. 过抛物线 $y=x^2$ 上的 $A(1,1)$ 作切线, 交坐标轴于 D,B. 点 C 在抛物线上,$E\in AC,F\in BC$ 满足 $AE/EC=\lambda_1,BF/FC=\lambda_2$, 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$. 直线 CD 与 EF 交于 P, 求 P 的轨迹.

解答. 切线为 $y=2x-1$, 故 $D=(1/2,0),B=(0,-1)$. 令 $C=(t,t^2)$. 在三角形 ABC 的重心坐标中,

$$E=\frac{A+\lambda_1 C}{1+\lambda_1},\qquad F=\frac{B+\lambda_2 C}{1+\lambda_2},$$

故直线 EF 方程为 $\lambda_1X+\lambda_2Y-Z=0$. 设 $P=(1-u)D+uC$, 其重心坐标为 $((1-u)/2,(1-u)/2,u)$. 代入并用 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 得 $u=1/3$. 所以

$$P=\left(\frac{t+1}{3},\frac{t^2}{3}\right).$$

消去 t 得轨迹方程

$$y=3x^2-2x+\frac{1}{3}.$$

11. 非零复数 a,b,c 满足 $|a|=|b|=|c|$ 且 $a^3+b^3+c^3=rabc$, 其中 $r\in\mathbb{R}, r\neq 3$. 问三个二次方程中有几个存在模长为 1 的根.

解答. 归一化 $|a|=|b|=|c|=1$, 写 $a=e^{i\alpha}, b=e^{i\beta}, c=e^{i\gamma}$, 并令

$$A=2\alpha-\beta-\gamma,\quad B=2\beta-\alpha-\gamma,\quad C=2\gamma-\alpha-\beta.$$

则 $A+B+C=0$, 且题设等价于 $e^{iA}+e^{iB}+e^{iC}=r$. 取虚部并用 $C=-A-B$:

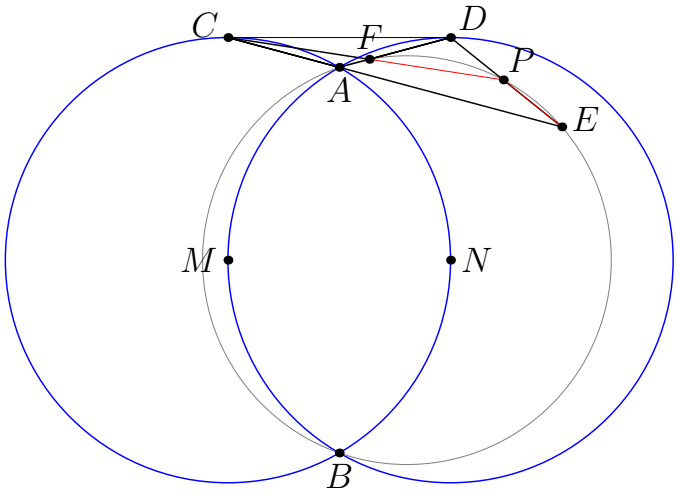
$$\sin A+\sin B-\sin(A+B)=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=0.$$

若两个中的相位为 0 模 2π, 则第三个也为 0, 此时 $r=3$, 与题设矛盾; 故恰有一个 (模 2π) 为 0.

对一般二次式 ux^2+vx+w ($|u|=|v|=|w|=1$), 它有单位根当且仅当 $v^2=uw$: 必要性是单位根的两个根乘积模长为 1, 且根的夹角必须为 $2\pi/3$; 充分性由 $v^2=uw$ 令 $t=(v/u)x$ 化为 $t^2+t+1=0$. 因此三个方程分别对应条件 $B=0, C=0, A=0$, 恰有一个方程有单位根.

二试（加试）.

一、 如图所示,$\odot M$ 与 $\odot N$ 相交于 A,B, 外公切线 CD 分别切于 C,D; AC,AD 分别与过 A,B 的圆 $\odot O$ 交于 E,F ($E,F\neq A$). 若 $P=CF\cap DE$, 证明 $P\in\odot O$.



解答. 取坐标 $A=(0,0), C=(1,0), D=(u,v)$ ($v\neq 0$), 记 $B=(p,q)$. 圆 (ABC) 的方程可写为

$$x^2+y^2-x+\frac{1-u}{v}y=0.$$

因 CD 在 C 处为该圆的切线; 同理把过 A,B,D 的圆在 D 处的切线条件写出, 两式相减得到

$$p=\frac{u+1}{v}q,\qquad p^2+q^2=2uq. \tag{1}$$

设 $E=(e,0), F=f(u,v)$, 并记 $r^2=u^2+v^2$. 圆 $(ABEF)$ 的方程为

$$x^2+y^2-ex+\frac{eu-fr^2}{v}y=0.$$

代入 B 并利用 (1), 得

$$e+r^2f=2uv. \tag{2}$$

两直线 CF, DE 的交点为

$$P=\left(\frac{ef(1+u)-e-fu}{ef-1},\frac{fv(e-1)}{ef-1}\right).$$

将此坐标代入圆 $(ABEF)$ 的方程, 再用 (2) 化简即得等式成立, 故 $P\in\odot O$.

二、 已知非负实数 $a_1,\ldots,a_{2026}$ 满足 $\sum a_i=1$, 求有序数对 (i,j) 的最大可能值, 使

$$\frac{a_i^2}{4}+a_j\geq\frac{1}{2025}.$$

解答. 记 $N=2026, t=1/(N-1)$, 并称满足不等式的有序对为好对. 先用下述引理:
若 $y_1+\cdots+y_N=0$, 则满足 $y_i+y_j\le 0$ 的无序对 $\{i,j\}$ 至少有 p 个, 其中 $p=\#\{i:y_i>0\}$.
证明引理时, 若存在正数 c 与负数 $-d$ 使 $c\le d$, 则删去这两个数; 若 $c<d$, 将它们换成负数 $-(d-c)$, 对 N 作归纳即可, 因为涉及新数的非正和可由原来的 $-d$ 与同一数配出. 若不存在这样的正负对, 则每个正数都大于每个负数的绝对值. 设正、负数个数分别为 p,q, 由总和为零得 $q>p$, 于是负负无序对已有 $\binom{q}{2}\ge p$ 个, 引理得证.
若 (i,j) 与 (j,i) 都是好对, 令 $s=a_i+a_j$. 则

$$\frac{2}{N-1}\le s+\frac{a_i^2+a_j^2}{4}\le s+\frac{s^2}{4}.$$

若 $s\le 2/N$, 右端不超过 $2/N+1/N^2<2/(N-1)$, 矛盾. 故双向好对必有 $a_i+a_j>2/N$.
再令 $d=\#\{i:a_i^2/4+a_i\ge t\}$. 对 $y_i=Na_i-1$ 应用引理, 因为这 d 个指标均满足 $a_i>1/N$, 可知满足 $a_i+a_j\le 2/N$ 的无序对至少有 d 个. 设无序对总数为 $C=\binom{N}{2}$, 双向好对数为 m. 由上式 $m\le C-H$, 其中 $H\ge d$ 是低和无序对数, 故非对角好对数不超过 $C+m\le 2C-H$. 加上对角好对数 d, 好对总数不超过 $2C=N(N-1)$.
取 $a_1=\cdots=a_{N-1}=1/(N-1), a_N=0$, 恰有第二指标 $j<N$ 的 $N(N-1)$ 个有序对为好对, 故最大值为

$$2026\cdot 2025=4102650.$$

三、 任意给出集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的 $2n-1$ 个二元子集, 证明总可从中选出 n 个二元子集, 使其并集的元素个数不超过 $\frac{2}{3}n+1$.
解答. 把二元子集看成图的边. 使用如下删点引理: 在一个有 $2n-1$ 条边的 n 点图中, 存在 $k=\lfloor (n-1)/3\rfloor$ 个点, 使与这些点相关联的边不超过 $n-1$ 条. 这是标准的低度删点法: 每次选取当前度数不超过 3 的点并删除; 若删点过程中出现 4-核, 则在该核中沿一条最长路每隔两点取一个点, 与此前删去的点合并, 所得点集的关联边数仍不超过 $n-1$.
取这样的 k 个点删去, 剩余点数为 $n-k\le\frac{2}{3}n+1$, 而不与所删点关联的边至少有

$$(2n-1)-(n-1)=n$$

条. 从这些边中任取 n 条, 其并集包含于剩余点集, 即得结论.

四、 已知 $a_1,a_2,\ldots,a_{2026}$ 为 $1,2,\ldots,2026$ 的一个排列, 且对任意正整数 m,n, 若 $|m-n|>20^{26}$, 则

$$\sum_{i=1}^{2026}(m+i,n+a_i)<2|m-n|,$$

求所有满足要求的数列.
解答. 令 $b_i=a_i-i$. 利用

$$\gcd(m+i,n+a_i)=\gcd(m+i,n-m+b_i).$$

若某些 b_i 不相等, 按两指标的同余条件取足够大的正整数 m,n 使对应的两个最大公因数分别等于 $|m-n-b_i|$ 与 $|m-n-b_j|$; 选取符号使两项之和不小于 $2|m-n|$, 这与题设矛盾. 故 b_i 全相等. 由于 (a_i) 与 (i) 都是 $1,\ldots,2026$ 的排列, 其和相同, 故该常数为 0, 即 $a_i=i$.
反之取 $a_i=i$, 令 $D=|m-n|>20^{26}$. 此时各项为 $g_i=\gcd(m+i,D)$. 若有两个 $g_i,g_j>D/2025$, 写 $g_i=D/x, g_j=D/y$, 则 $x,y<2025$ 且 $D/\operatorname{lcm}(x,y)$ 整除 $|i-j|<2026$, 从而 $D<2026\cdot 2025^2$, 矛盾. 因此至多一个 g_i 超过 $D/2025$. 若没有, 总和严格小于 $2D$; 若有一个, 其余 2025 项均不超过 $D/2025$, 且不可能全部等于 $D/2025$, 故总和仍严格小于 $2D$. 因此唯一满足条件的排列为

$$(a_1,a_2,\ldots,a_{2026})=(1,2,\ldots,2026).$$

5 yfd-05

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 设集合 $S=\{1,2,\dots,10\}$. 求满足

$$A\cap\{1,2,3\}\neq\varnothing,\qquad A\cup\{4,5,6\}\neq S$$

的子集 A 的个数.

解答. 令

$$E_1=\{A:A\cap\{1,2,3\}=\varnothing\},\qquad E_2=\{A:A\cup\{4,5,6\}=S\}.$$

则 $|E_1|=2^7,|E_2|=2^3$，且 $E_1\cap E_2=\varnothing$. 故所求为

$$2^{10}-2^7-2^3=888.$$

2. 设 $a,b,c,d>0$，$ac=100,bd=101$. 求

$$M=a^{\log_{10}b}b^{\log_{10}c}c^{\log_{10}d}d^{\log_{10}a}.$$

解答. 取常用对数,

$$\lg M=(\lg a+\lg c)(\lg b+\lg d)=\lg(ac)\lg(bd)=2\lg 101.$$

所以 $M=101^2=10201$.

3. 一条直线与函数 $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ 的图象交于三个不同的点，其中两个点的横坐标为 $6,7$. 求第三个横坐标.

解答. 设直线为 $y=ux+v$. 交点横坐标是方程

$$x^3-ux^2-vx+2=0$$

的三个根. 由韦达定理，三根之积为 -2，故第三根为

$$-\frac{2}{6\cdot 7}=-\frac{1}{21}.$$

4. 随机投掷四颗骰子，求至少有两颗骰子点数之和为 9 的概率.

解答. 只有出现 $3,6$ 或出现 $4,5$ 才能组成和为 9 的一对. 令 E_{36}、E_{45} 分别表示这两种事件，则

$$|E_{36}|=|E_{45}|=6^4-2\cdot 5^4+4^4=302.$$

两事件同时发生时四颗骰子恰为 $3,4,5,6$ 的一个排列，故交集有 $4!=24$ 个结果. 于是

$$\mathbb{P}(E_{36}\cup E_{45})=\frac{302+302-24}{6^4}=\frac{145}{324}.$$

5. 正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长为 5，侧棱两两的夹角彼此相等且固定，顶点到底面的高度为 4. 在 PA 上取 D 使 $PD=4$，求点 P 到平面 BCD 的距离.

解答. 设 O 为底面中心. 由 $PO=4,PA=5$ 得 $OA=3$，从而 $AB=3\sqrt{3}$，且

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{27\sqrt{3}}{4}\cdot 4=9\sqrt{3}.$$

因 $D=P+\frac{4}{5}(A-P)$，有 $V_{P-BCD}=\frac{4}{5}V_{P-ABC}=\frac{36\sqrt{3}}{5}$. 又

$$\cos\angle APB=\frac{25+25-27}{50}=\frac{23}{50},\qquad BD=CD=\sqrt{25+16-40\cdot\frac{23}{50}}=\sqrt{\frac{113}{5}}.$$

三角形 BCD 对 BC 的高为

$$h_{BCD}=\sqrt{\frac{113}{5}-\frac{(3\sqrt{3})^2}{4}}=\frac{\sqrt{1585}}{10},\qquad S_{BCD}=\frac{3\sqrt{3}\sqrt{1585}}{20}.$$

若所求距离为 h，由 $V_{P-BCD}=S_{BCD}h/3$ 得

$$h=\frac{144}{\sqrt{1585}}.$$

6. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的焦点为 F_1,F_2. 点 P 在第一象限, 三角形 PF_1F_2 的重心为 G、内心为 I, 且 $IG\parallel F_1F_2$. 求 P.

解答. 记 $a=2,c=3$, 设 $P=(x,y)$. 由于 F_1F_2 为水平线, 平行条件等价于 $y_I=y_G=y/3$. 由内心坐标的边长加权公式,

$$y_I=\frac{6y}{PF_1+PF_2+6},$$

故 $PF_1+PF_2=12=4c$. 双曲线右支满足 $PF_1-PF_2=2a=4$, 从而 $PF_1=8,PF_2=4$. 两式相减给出 $x=4$, 代回双曲线得 $y^2=15$. 第一象限条件确定

$$P=(4,\sqrt{15}).$$

7. 求方程

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\cos^2(kx)=n$$

在 $[0,2\pi)$ 内的解数.

解答. 当 $\sin x\neq 0$ 时,

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\cos(2kx)=\frac{\sin((2n+1)x)\cos((2n+2)x)}{\sin x}.$$

代入原式并用和差化积, 得到

$$\sin((4n+3)x)+\sin x=0\iff 2\sin((2n+2)x)\cos((2n+1)x)=0.$$

方程 $\sin((2n+2)x)=0$ 在 $[0,2\pi)$ 有 $4n+4$ 个根, 去掉 $x=0,\pi$（直接代回原式均不成立）后有 $4n+2$ 个; 方程 $\cos((2n+1)x)=0$ 有 $4n+2$ 个根. 两类交集只有 $x=\pi/2,3\pi/2$, 故解数为

$$(4n+2)+(4n+2)-2=8n+2.$$

8. 正十棱柱的顶点为 $A_1,\dots,A_{10},B_1,\dots,B_{10}$. 不经过顶点的平面把这些顶点分成两部分, 求其中一部分 M 的可能个数.

解答. 平面与上下两个底面的交线互相平行. 在一个正十边形中, 一条不经过顶点的直线所取出的非空真子集必为连续顶点块; 长度为 r 的连续块有 10 个. 设上下底面所取块的长度为 x,y, 并令 $x\le y$. 平行交线的方向给出计数引理: 当 $x,y\in\{1,\dots,9\}$ 时, 若 x,y 同奇偶, 块的相对位置有 10 种; 若异奇偶, 块的相对位置有 20 种. 因此两层均为非空真块时共有

$$10(5^2+4^2)+20(2\cdot 5\cdot 4)=1210$$

种. 若某一层为空集或全集, 另一层可为空、全集或任意一个非空真连续块, 共

$$4+2\cdot 2\cdot 90=364$$

种. 总数为 $1210+364=1574$.

二、解答题: 本大题共 3 小题, 满分 56 分.

9. 已知锐角三角形 ABC 满足

$$\frac{a\sin A+c\sin C-b\sin B}{a\sin B\sin C}=2\sqrt{3},$$

并在 AC 的另一侧作 $\triangle ACD$, 其中 $AD=3$, $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=-3$, $[ACD]=3\sqrt{3}/2$. 求 $[ABC]$ 的取值范围.

解答. 由正弦定理和恒等式

$$\sin^2A+\sin^2C-\sin^2B=2\sin A\sin C\cos B$$

可得 $2\cot B=2\sqrt{3}$, 故 $B=\pi/6$. 在 $\triangle ACD$ 中设 $D=\angle ADC$, 则

$$3CD\cos D=-3,\qquad \frac{3}{2}CD\sin D=\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

从而 $D=2\pi/3, CD=2$，以及 $AC=\sqrt{19}$. 外接圆半径为 $R=AC/(2\sin B)=\sqrt{19}$，故 $C=5\pi/6-A$. 锐角条件给出 $\pi/3<A<\pi/2$，并且

$$[ABC]=\frac{1}{2}ac\sin B=19\sin A\sin\left(\frac{5\pi}{6}-A\right).$$

函数在 $A=5\pi/12$ 处取得最大值，两端只趋近于 $19\sqrt{3}/2$，故

$$[ABC]\in\left(\frac{19\sqrt{3}}{2},\frac{19(2+\sqrt{3})}{4}\right].$$

10. 已知 $p,q>0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$ 且

$$|a_{m+n}-a_m-a_n|\le\frac{1}{pm+qn}\qquad(m,n\in\mathbb{N}^*).$$

求 a_n.

解答. 令 $d_n=a_n-n$，则 $d_1=0$ 且

$$|d_{m+n}-d_m-d_n|\le\frac{1}{pm+qn}.$$

取 $n=1, m=r$ 并递推，得

$$|d_N|\le\sum_{r=1}^{N-1}\frac{1}{pr+q}=O(\log N),\qquad d_N/N\longrightarrow 0.$$

固定 n，逐项取 $(m,n)=(jn,n)$，有

$$|d_{kn}-kd_n|\le\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{pj+q}=O\left(\frac{\log k}{n}\right).$$

除以 kn 并令 $k\to\infty$，结合 $d_{kn}/(kn)\to 0$ 得 $d_n=0$. 所以 $a_n=n$.

11. 抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的三条切线构成三角形 ABC. 证明其外接圆过定点并求该点.

解答. 设三条切线的参数分别为 u,v,w，即

$$\ell_t: y=tx+\frac{p}{2t}\quad(t=u,v,w).$$

两切线 ℓ_s,ℓ_t 的交点为

$$X_{st}=\left(\frac{p}{2st},\frac{p(s+t)}{2st}\right).$$

记 $A=X_{uv}, B=X_{vw}, C=X_{wu}$，并令 $S=(p/2,0)$. 把坐标同时乘以 $2/p$ 后，

$$\operatorname{slope}(SA)=\frac{u+v}{1-uv},\qquad\operatorname{slope}(SB)=\frac{v+w}{1-vw},$$

从而

$$\tan\angle ASB=\frac{w-u}{1+uw}.$$

而 CA, CB 分别为切线 ℓ_u,ℓ_w，同理

$$\tan\angle ACB=\frac{w-u}{1+uw}.$$

故 $\angle ASB=\angle ACB$（有向角模 π），四点 A,B,C,S 共圆，定点为

$$S\left(\frac{p}{2},0\right).$$

二试： 本大题共 4 小题，满分 180 分.

一、 给定整数 $n \geq 3$，整数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $1 \leq a_k \leq n$，且对每个 $1 \leq k \leq n-1$，

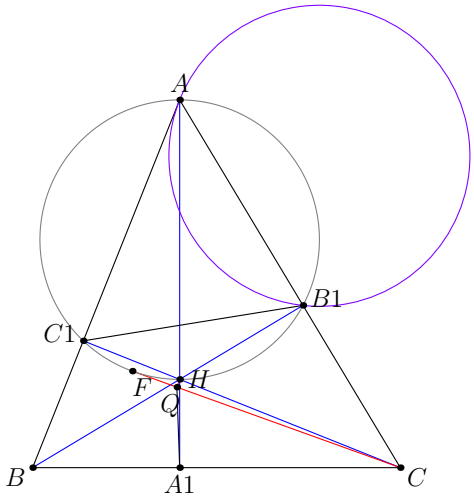
$$\left| \frac{a_1 + \cdots + a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \right|$$

都取到非零的最小值．求这样的数列个数．

解答. 记前 k 项平均数为 μ_k. 由于 a_1, a_2 为整数, 非零最小值只能为 $1/2$, 故 $|a_2 - a_1| = 1$. 设 $a_1 = m, a_2 = m+1$ (交换次序另计)，则 $\mu_2 = m + 1/2$．若 $|a_3 - \mu_2|$ 取到最小值，必有 $a_3 \in \{m, m+1\}$；同理，归纳可得：前 k 项恰为 k 个连续整数，且下一项只能把区间向左或向右扩展一个端点．由 $1 \leq a_i \leq n$，最终必须得到区间 $\{1, 2, \ldots, n\}$，每一步有左右两种选择，且初始方向已包含在第一次选择中．因此数列总数为

$$2^{n-1}.$$

二、 AA_1, BB_1, CC_1 是锐角三角形 ABC 的高，H 是三角形 ABC 的垂心．过 C 作三角形 AB_1C_1 的外接圆的切线 CF，F 在三角形 ABC 的内部，H 在 CF 上的投影为 Q．圆 D 过 A, B_1 并与 AB 相切．证明：A_1Q 是圆 D 的切线.



解答. 置坐标 $A = (0, h), B = (-u, 0), C = (v, 0)$，其中 $u, v, h > 0$，于是 $A_1 = (0, 0)$，$H = (0, uv/h)$．因为 $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90°$，圆 $\Gamma = (AB_1C_1)$ 是以 AH 为直径的圆，其方程为

$$x^2 + y^2 - \left(h + \frac{uv}{h}\right) y + uv = 0.$$

设切线 CF 的斜率为 t，即 $y = t(x - v)$．将其代入 Γ，判别式为零，化简为

$$\left[\left(h + \frac{uv}{h}\right)^2 - 4v(u+v)\right] t^2 - 4v\left(h + \frac{uv}{h}\right) t - 4uv = 0. \tag{1}$$

由点到直线的投影公式，Q 的坐标给出直线 A_1Q 的斜率

$$s = \frac{(u/h)t - 1}{u/h + t}. \tag{2}$$

另一方面，过 A、B_1 且在 A 处与 AB 相切的圆 D 可写为

$$x^2 + y^2 - 2hy + h^2 + \lambda(hx - uy + uh) = 0, \qquad \lambda = \frac{uv - h^2}{h(u+v)}. \tag{3}$$

把 $y = sx$ 代入 (3)，所得关于 x 的二次式的判别式，利用 (1)、(2) 消去 t 后恰为 0．所以直线 A_1Q 与圆 D 只有一个交点，即为圆 D 的切线.

三、 设 a 是正分数．证明：a 是真分数，当且仅当存在两两不同且大于 1 的正整数 $q_1, \ldots, q_s$，使

$$a = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_s}, \qquad q_i \mid q_{i+1}\ (1 \leq i < s).$$

解答. 若有此表示，由 $q_{i+1} \geq 2q_i$ 及 $q_1 \geq 2$，

$$0 < a \leq \frac{1}{q_1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{s-1}}\right) < \frac{2}{q_1} \leq 1,$$

故 a 为真分数. 反之设 $a = p/q \in (0,1)$. 令当前余数为 $r = p/q$、当前公因子尺度为 $Q = 1$. 若 $r > 0$, 令 $x = Qr \in (0,1)$, 取 $m = \lceil 1/x \rceil \geq 2$, 并置

$$Q' = mQ, \qquad r' = r - \frac{1}{Q'}.$$

则 $Q'r' = mx - 1$, 其分子（约分前）严格小于 x 的分子; 故有限步后余数为 0. 所得分母 $q_i = Q'$ 两两不同且满足 $q_i \mid q_{i+1}$, 从而得到所需表示.

四、 小猿城的街道都是东西向和南北向, 选定 n 个十字路口设置保安亭（任意两个保安亭不在同一街道上）. 以两个保安亭为对角顶点的轴对齐矩形内保安亭数称为安全强度. 求安全强度最大值的最小可能值.

解答. 将保安亭按东西向街道编号为 (i, y_i), 其中 $(y_1, \ldots, y_n)$ 为排列. 对 $i < j$, 记

$$s(i,j) = \#\{k : i \leq k \leq j,\ \min(y_i, y_j) \leq y_k \leq \max(y_i, y_j)\}.$$

使用五点分层引理: 若 $n = 5k + r$ $(0 \leq r < 5)$, 任意排列均存在 $i < j$ 使 $s(i,j) \geq k + 2$; 并且可按下述交错构造达到此界: 先取四个角点形成一个基本矩形, 再把其余点分成 $k - 1$ 组五点（末组按 r 取点）, 每组依次放在当前矩形的左上、右下、右上、左下及交错的外侧位置, 并同时使用尚未出现的最小、次小、最大、次大、居中的纵坐标.

下界的核验是: 对任意一对端点, 按其相对基本矩形的四类位置分类; 每完整五点组至少有一个点落入该矩形, 基本矩形贡献至少两个点, 故 $s(i,j) \geq k + 2$. 上述交错构造中, 对任意端点矩形逐组检查, 完整五点组至多贡献一个点, 末组至多贡献 r 个点; 四类位置分别给出 $s(i,j) \leq k+1, k+1, k+2, k+2$, 故最大安全强度不超过 $k + 2$. 因此最小值为

$$\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 2.$$

6 yfd-06

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数且 $a_4a_7=9$，求

$$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}.$$

解答. 等比数列满足 $a_1a_{10}=a_2a_9=\cdots=a_5a_6=a_4a_7=9$，故

$$a_1a_2\cdots a_{10}=9^5,\qquad \sum_{j=1}^{10}\log_3 a_j=\log_3(9^5)=10.$$

2. 设

$$A=\{(x,y):x^2-3xy+4y^2=\tfrac{7}{2}\},\qquad B=\{(x,y):kx+y=2\}\ (k>0).$$

当 $A\cap B$ 只有一个元素时，求 k.

解答. 代入 $y=2-kx$，得关于 x 的二次方程

$$(4k^2+3k+1)x^2-(16k+6)x+\frac{25}{2}=0.$$

相切条件为判别式零，即

$$\Delta=14(4k^2+3k-1)=0.$$

结合 $k>0$ 得 $k=1/4$.

3. 已知函数 $f(x)=\cos(a\sin x)-\sin(b\cos x)$ 无零点，求 a^2+b^2 的取值范围.

解答. 令 $R=\sqrt{a^2+b^2}$. 等式 $f(x)=0$ 等价于

$$a\sin x+b\cos x=\frac{\pi}{2}+2j\pi\quad\text{或}\quad a\sin x-b\cos x=-\frac{\pi}{2}+2j\pi\qquad(j\in\mathbb{Z}).$$

左端两个函数的振幅均为 R，右端数列中绝对值最小的数为 $\pi/2$. 因此无零点当且仅当 $R<\pi/2$，即

$$a^2+b^2\in\left[0,\frac{\pi^2}{4}\right).$$

4. 从正十二边形的顶点中取出四个顶点，求它们两两不相邻的概率.

解答. 不选定顶点 A_1 时，在路径 $A_2A_3\cdots A_{12}$ 中选四个互不相邻的顶点，方法数为 $\binom{8}{4}=70$；选定 A_1 时，A_2,A_{12} 不能再选，在路径 $A_3\cdots A_{11}$ 中选三个互不相邻的顶点，方法数为 $\binom{7}{3}=35$. 故有利选法数为 $70+35=105$，所求概率为

$$\frac{105}{\binom{12}{4}}=\frac{7}{33}.$$

5. 定义在实数域上的函数 f 满足

$$f\left(\frac{1-4x}{4-x}\right)=4-xf(x)\qquad(x\neq 4).$$

已知存在两个互不相同的实数 $a,b\neq 4$ 使 $f(a)=f(b)=5/2$，求 $a+b$.

解答. 记 $T(x)=(1-4x)/(4-x)$，则 $T(T(x))=x$. 将题设分别用于 x 和 $T(x)$，消去 $f(T(x))$，得到

$$f(x)=4-T(x)\big(4-xf(x)\big),\qquad f(x)=\frac{6(1+x)}{2x^2-x+2}.$$

于是 $f(x)=5/2$ 等价于

$$10x^2-17x-2=0.$$

两根即为 a,b，由韦达定理 $a+b=17/10$.

6. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M,N 分别为 BB_1,A_1C_1 的中点. 过 A,M,N 的平面将棱柱分成体积 $V_1<V_2$ 的两部分，求 V_1/V_2.

解答. 取仿射坐标

$$A=(0,0,0),\ B=(1,0,0),\ C=(0,1,0),\ A_1=(0,0,1),\ B_1=(1,0,1),\ C_1=(0,1,1).$$

则 $M=(1,0,1/2), N=(0,1/2,1)$，截面平面方程为

$$z=\frac{x}{2}+2y.$$

底面三角形为 $D=\{x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$. 令 $T=\{(x,y)\in D: x/2+2y\ge 1\}$，则 T 为顶点 $(0,1),(0,1/2),(2/3,1/3)$ 构成的三角形，面积 $1/6$. 在 $D\setminus T$ 上，平面以上的柱高为 $1-x/2-2y$，故

$$\begin{aligned}V_{\text{above}}&=\iint_{D\setminus T}\Big(1-\frac{x}{2}-2y\Big)\,dx\,dy\\&=\frac{1}{3}-\frac{7}{36}=\frac{5}{36}.\end{aligned}$$

这里用到了 $\iint_D(x/2+2y)=5/12$、$\iint_T(x/2+2y)=2/9$. 棱柱总体积为 $1/2$（仿射变换不改变体积比），所以

$$\frac{V_1}{V_{\text{prism}}}=\frac{5}{18},\qquad \frac{V_2}{V_{\text{prism}}}=\frac{13}{18},\qquad \frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{13}.$$

7. 圆 $C_1: x^2+(y-4)^2=16/5$、抛物线 $C_2: y^2=4x$ 与动直线 $l: y=k(x+4)$ 将平面分成五个部分，求 k 的取值范围.

解答. 直线与圆相切的斜率满足

$$\frac{|4k-4|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{4}{\sqrt{5}},$$

即 $k=1/2$ 或 $k=2$. 直线代入抛物线得

$$k^2x^2+(8k^2-4)x+16k^2=0,$$

故相切斜率为 $k=\pm 1/2$（$k=0$ 时为抛物线顶点处的切线）. 按这些临界值把 k 分段，逐段统计直线与两曲线的交点数及切点重合情形，得到

k	$(-\infty,-\frac12)$	$-\frac12$	$(-\frac12,0)$	0	$(0,\frac12)$	$\frac12$	$(\frac12,2)$	2	$(2,\infty)$
区域数	4	5	6	5	6	5	5	4	4

所以所求为

$$k\in\left[\frac12,2\right)\cup\left\{-\frac12,0\right\}.$$

8. 将 $1,\dots,9$ 填入 3×3 方格，计算所有相邻格两数之差绝对值之和. 求使该和最大的填法数.

解答. 把外圈八个数按环路编号，记其升序为 $b_1<\cdots<b_8$，中心数为 c. 外圈八条边的和满足

$$E_{\text{out}}\le 2\big(b_5+b_6+b_7+b_8-b_1-b_2-b_3-b_4\big).$$

这是因为将环上每条边定向为从小端指向大端后，各点所得系数属于 $\{-2,0,2\}$，再按重排不等式估计. 中心四条边的和不超过外圈八个数到 c 的距离中最大的四个之和. 对 $c=1,\dots,9$ 逐一取外圈数 $\{1,\dots,9\}\setminus\{c\}$ 可得

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\max(E_{\text{out}}+E_{\text{cen}})$	58	56	54	53	54	53	54	56	58

故最大和为 58，且只能在 $c=1$ 或 $c=9$ 时取得. 此时中心相邻的四个格必须放置四个较大的数，外圈环路高低交替；四个大数和四个小数分别任意排列，故每个中心有 $(4!)^2$ 种，填法总数为

$$2(4!)^2=1152.$$

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分.

9. 设 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2-2a_n+2}+b$.

(1) 若 $b=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解答. 此时

$$(a_{n+1}-1)^2=(a_n-1)^2+1,$$

且 $a_n\geq 1$. 由 $a_1=1$ 归纳得

$$a_n=1+\sqrt{n-1}.$$

(2) 若 $b=-1$，问是否存在实数 c 使 $a_{2n}<c<a_{2n+1}$ 对所有 $n\geq 1$ 成立?

解答. 令

$$g(x)=\sqrt{(x-1)^2+1}-1.$$

其不动点满足 $x=g(x)$，平方后得唯一解 $x=1/4$. 函数 g 在 $(-\infty,1)$ 上严格递减，且

$$x<\frac{1}{4}\Longrightarrow g(x)>\frac{1}{4},\qquad \frac{1}{4}<x<1\Longrightarrow g(x)<\frac{1}{4}.$$

由 $a_1=1,a_2=0$，归纳得到

$$a_{2n}<\frac{1}{4}<a_{2n+1}\qquad (n\geq 1).$$

因此存在且唯一的分隔常数 $c=1/4$.

10. 在椭圆 $C:x^2/a^2+y^2/b^2=1$（$a>b>0$）中，F_1,F_2 为左右焦点. P 为非长轴顶点，$Q\in F_1F_2$，且三角形 PQF_1,PQF_2 的内切圆半径相等. 证明 $|PQ|=b$.

解答. 记焦距半长为 $c=\sqrt{a^2-b^2}$，设 $F_1=(-c,0),F_2=(c,0),Q=(m,0)$，并置

$$t=|PQ|,\qquad r_1=|PF_1|,\quad r_2=|PF_2|.$$

两三角形的高相同，内切半径相等即面积与半周长之比相等，故

$$\frac{c+m}{r_1+t+c+m}=\frac{c-m}{r_2+t+c-m}.$$

消去公共项并利用椭圆性质 $r_1+r_2=2a$，得

$$2m(a+t)=c(r_1-r_2).$$

又 $r_1^2-r_2^2=4cx$（设 $P=(x,y)$），从而

$$m=\frac{c^2x}{a(a+t)}. \tag{1}$$

若 $x=0$，则 (1) 给出 $m=0$，立即有 $t=b$. 以下设 $x\neq 0$. 由椭圆方程

$$\frac{t^2-b^2}{x^2}=\frac{c^2}{a^2}-2\frac{m}{x}+\frac{m^2}{x^2}=\frac{c^2(t^2-b^2)}{a^2(a+t)^2}.$$

若 $t^2\neq b^2$，则 $a^2(a+t)^2=c^2x^2$，但 $a+t>a>c$ 且 $|x|<a$（P 非长轴顶点），矛盾. 故 $t=b$.

11. 已知 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ 且

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1})=-1.$$

求 $|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)|$ 的最大值.

解答. 写 $z_j=e^{i\theta_j}$，令 $\alpha=\theta_1-\theta_2$、$\beta=\theta_2-\theta_3$. 条件化为

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)=-1.$$

利用恒等式

$$1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

可知三点中有一对为对径点. 不妨设 $z_2=-z_1$，令

$$x=|z_3-z_1|,\qquad y=|z_3-z_2|.$$

则 $x^2+y^2=4$，从而

$$|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)|=2xy\leq x^2+y^2=4.$$

当 z_3 位于与 z_1z_2 垂直的直径端点时取等号，故最大值为 4.

二试： 本大题共 4 小题，满分 180 分.

一、 给定 $0 \le x_1, \dots, x_{1001} \le 1$，求

$$F = \sum_{i=1}^{1001} x_i - \sum_{i=1}^{1001} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{1001} x_i x_{i+2}, \qquad x_{1002} = x_1,\ x_{1003} = x_2$$

的最大值.

解答. F 对每个变量均为一次函数，故最大值可在 $x_i \in \{0,1\}$ 处取得. 设 $S = \{i : x_i = 1\}$，则 $F = |S| - e(S)$，其中 $e(S)$ 是循环图中距离 1 或 2 的两点均在 S 内的边数. 若 S 非空且不为全集，把 S 的循环连续段记为长度 L_j，相邻两段之间的零段长度记为 $G_j \ge 1$. 长度为 L 的一段贡献 $(L-1)+(L-2)_+$ 条边；若 $G_j = 1$，相邻两段末、首点还贡献一条距离 2 的边. 因此

$$F = \sum_j \left(1 - (L_j - 2)_+ - \mathbf{1}_{\{G_j=1\}}\right).$$

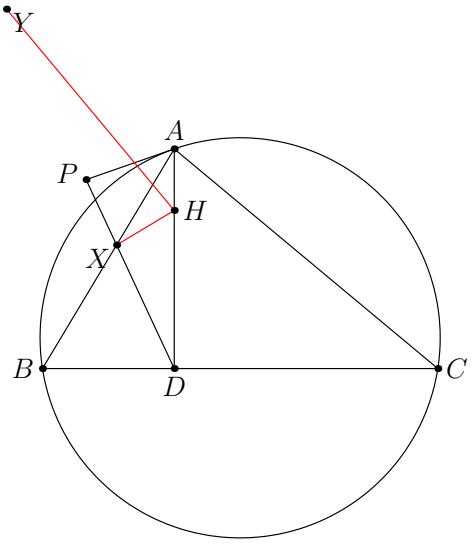
对每个 j，直接分 $L_j = 1, 2$ 或 $L_j \ge 3$ 检查有

$$1 - (L_j - 2)_+ - \mathbf{1}_{\{G_j=1\}} \le \frac{L_j + G_j}{3}.$$

求和得 $F \le 1001/3$，故 $F \le 333$. 取每隔三个位置取一个 $x_i = 1$（共 333 个），其余为 0，可得 $F = 333$. 最大值为

$$333.$$

二、 在三角形 ABC 中，垂心为 H，D 为 BC 上高线的垂足. 点 P 满足 $AP = HP$ 且 AP 与三角形 ABC 的外接圆相切. 直线 PD 与 AB, AC 分别交于 X, Y. 证明 $\angle YHX = \angle BAC$ 或 $\angle YHX + \angle BAC = 180^\circ$.



解答. 设 $D = (0,0), A = (0,h), B = (-u,0), C = (v,0)$，其中 $u, v, h > 0$. 则 $H = (0, uv/h)$. 外接圆在 A 处的切线斜率为 $(v-u)/(h+uv/h)$. 设 $P = (s, (h+uv/h)/2)$，由 $AP = HP$ 可得

$$s = \frac{(uv/h)^2 - h^2}{2(v-u)},$$

从而直线 PD 的斜率为

$$r = \frac{v-u}{uv/h - h}.$$

直线 PD 与 AB, AC 交于 X, Y. 利用 $AB : y = h + (h/u)x$、$AC : y = h - (h/v)x$，并记 $H = (0, uv/h)$，直接计算得

$$\mathrm{slope}(HX) = \frac{u}{h}, \qquad \mathrm{slope}(HY) = -\frac{v}{h}.$$

另一方面

$$\mathrm{slope}(AB) = \frac{h}{u}, \qquad \mathrm{slope}(AC) = -\frac{h}{v}.$$

两组直线的夹角正切绝对值均为

$$\frac{h(u+v)}{|h^2-uv|},$$

故两角相等或互为补角，结论成立.

三、 对正整数 $N>1$，按题面记 $q_1\le\cdots\le q_t$，并令 $A_1=q_1$、$A_{j+1}=q_{j+1}-1/A_j$. 求满足

$$A_t=\frac{p_1\alpha_1+\cdots+p_k\alpha_k}{t}$$

的全部 N.

解答. 写 $A_j=x_j/y_j$ 为既约分数. 由

$$x_{j+1}=q_{j+1}x_j-y_j,\qquad y_{j+1}=x_j,$$

且 $q_{j+1}\ge 2$，归纳得

$$x_j\ge y_j+1,\qquad y_j\ge j.$$

其中 $y_j=j$（$j\ge 2$）当且仅当 $q_1=\cdots=q_{j-1}=2$. 右端是整数除以 t，既约后的分母不超过 t；因此必须有 $y_t=t$，从而 $q_1=\cdots=q_{t-1}=2$.

若 $t=1$，则 $N=p$ 为任意素数. 若 $t\ge 2$，写 $q_t=p$，则 $N=2^{t-1}p$，并且

$$A_{t-1}=\frac{t}{t-1},\qquad A_t=p-\frac{t-1}{t}=\frac{(p-1)t+1}{t}.$$

与算术平均 $[2(t-1)+p]/t$ 相等当且仅当 $(p-3)(t-1)=0$，故 $p=3$. 全部解为

$$N=p\quad(p\text{ 为素数}),\qquad N=3\cdot 2^r\quad(r\ge 1).$$

四、 对正整数 n 定义 R_n 如题面. 若任意 n-小猿图一定是 m-大猿图，求 m 的最小值.

解答. 先证上界. 给定一个 n-小猿图的标号，将其 n 个互异标签按任意顺序映射到

$$0,1,2,\ldots,n-1\subset R_{2n-1}.$$

原图每条边的两个端点标签不同，故红边仍异标；蓝边两端是两个不同的非负数，和不为 0. 所以 $m=2n-1$ 足够.

下证不能更小. 任取 $m\le 2n-2$，取 $t=m+1$，构造顶点 V_{ij}（$1\le i\le n, 1\le j\le t$）：同一 i 的顶点间不连边；当 $i\ne i'$ 时，$V_{ij}V_{i'j}$ 设为蓝边，而 $V_{ij}V_{i'j'}$（$j\ne j'$）设为红边. 给 V_{ij} 标号 i（把 $1,\ldots,n$ 任意对应到 R_n），可见这是 n-小猿图.

设它有一个 m-大猿标号.固定一列 j,其 n 个标签两两不能互为相反数(蓝边条件),而 R_m 中至多有 $\lceil m/2\rceil\le n-1$ 个互不相反的不同数，故该列有两个顶点同标，记该标为 r_j. 若另一列 $j'\ne j$ 中某个顶点也标 r_j，则它必与原列两个同标顶点中的至少一个由红边相连，矛盾. 故 $r_1,\ldots,r_t$ 两两不同；但 $t=m+1>|R_m|=m$，矛盾. 所以 $m\ge 2n-1$，结合上界得

$$m_{\min}=2n-1.$$

7 yfd-07

一、填空题. 本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 平面上的点集
$$M=\left\{(x,y):\log_2(x^2-x+2)=\sin y-\sqrt{3}\cos y,\ \frac{\pi}{2}\le y\le\pi\right\}$$
向 x 轴投影，求所得图形的长度.
解答. 右端为 $2\sin(y-\pi/3)$，其值域为 $[1,2]$. 因此
$$1\le\log_2(x^2-x+2)\le 2\iff 2\le x^2-x+2\le 4.$$
于是 $x\in[-1,0]\cup[1,2]$，投影长度为 2.

2. 已知 $a_1=1$ 且 $a_n+1<a_{n+1}<2a_n+2$. 设 $S_n=\sum_{j=1}^{n}a_j$. 若 $S_m=2026$，求正整数 m 的可能值个数.
解答. 由递推不等式归纳得
$$a_n>n,\qquad a_n<3\cdot 2^{n-1}-2.$$
故
$$\frac{m(m+1)}{2}<2026<3\cdot 2^m-2m-3.$$
这给出 $10\le m\le 63$. 对固定的 m，所有满足严格递推不等式的 $(a_1,\dots,a_m)$ 构成连通开集，S_m 的像是区间；其下、上确界分别为上述两个端点。因此每个 $m=10,\dots,63$ 都能取到 $S_m=2026$，共有 54 个.

3. 设 $a\ge b\ge c>0$ 且 $a+b+c=abc$，求 bc 的最大值.
解答. 除以 abc 得
$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}=1.$$
由 $bc\le ac\le ab$，有 $3/(bc)\ge 1$，即 $bc\le 3$. 当 $a=b=c=\sqrt{3}$ 时等号成立，故最大值为 3.

4. 空间向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 两两夹角均为 60°，且 $|\mathbf{a}|=1,|\mathbf{b}|=2,|\mathbf{c}|=4$. 若
$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{b},\qquad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{a})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{c},$$
求 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$ 的最大值.
解答. 配方得
$$\left|\mathbf{u}+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}\right|=\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|}{2},\qquad \left|\mathbf{v}+\frac{\mathbf{a}-\mathbf{c}}{2}\right|=\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{c}|}{2}.$$
故三角不等式给出
$$|\mathbf{u}-\mathbf{v}|\le\frac{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|+|\mathbf{a}-\mathbf{c}|+|\mathbf{b}-\mathbf{c}|}{2}=\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}.$$
其中 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{3}$、$|\mathbf{a}-\mathbf{c}|=\sqrt{13}$、$|\mathbf{b}-\mathbf{c}|=2\sqrt{3}$. 令两个圆心到端点的半径方向均取在 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 方向的相反方向，可取到等号，故最大值为 $\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{13}}{2}$.

5. 在 3×3 方格中填入非负整数，使每行、每列的和均为 9，求填法数.
解答. 设左上 2×2 子表为 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则整表唯一写成
$$\begin{pmatrix}a & b & 9-a-b\\ c & d & 9-c-d\\ 9-a-c & 9-b-d & a+b+c+d-9\end{pmatrix}.$$
四个变量非负并满足四个边界和不超过 9、总和不少于 9. 对 a,b,c,d 作星条计数并对三类越界情形容斥，得到
$$\binom{11}{2}^2-3\binom{12}{4}=1540.$$
故填法数为 1540.

6. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，$\angle ABD+\angle CBD=\pi/2$，且 $BD=BC=2$．求外接球表面积的最小值．

解答． 令 $\theta=\angle BCD=\angle BDC$．则 $\angle CBD=\pi-2\theta$，从而

$$\angle ABD=2\theta-\frac{\pi}{2},\qquad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

设 K 为 $\triangle BCD$ 的外心，O 为四面体外心．因 $AD\perp$ 平面 BCD 且 $OA=OD$，O 在过 K 的垂线上，且

$$R^2=OK^2+\left(\frac{AD}{2}\right)^2=\frac{1}{\sin^2\theta}+\cot^2(2\theta).$$

令 $u=2\sin^2\theta-1\in(0,1)$，化简为

$$R^2=\frac{u^2-2u+2}{1-u^2}.$$

其导数的符号由 $-u^2+3u-1$ 决定，故在 $u=(3-\sqrt5)/2$ 处取得最小值

$$R^2=\frac{1+\sqrt5}{2}.$$

所以外接球表面积的最小值为

$$4\pi R^2=2(1+\sqrt5)\pi.$$

7. 在锐角三角形 ABC 中，边 a,b,c 分别对角 A,B,C，满足

$$\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\frac{2\sin B-\sin C}{\sin C},\qquad a=4.$$

求 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围．

解答． 由余弦定理和正弦定理，题设化为

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{b^2+c^2-a^2}=\frac{2b-c}{c},$$

即 $a^2=b^2+c^2-bc$，故 $A=60^\circ$．又 B,C 锐且 $B+C=120^\circ$，所以

$$bc=\frac{64}{3}\sin B\sin C\in\left(\frac{32}{3},16\right].$$

记 $t=bc$．因 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{b^2+c^2+bc}=\sqrt{16+2t}$，且

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{t}{2},$$

所求为 $f(t)=\sqrt{16+2t}-t/2$．在 $t>32/3$ 上 $f'(t)<0$，故

$$f(t)\in\left[4\sqrt3-8,\frac{4\sqrt{21}-16}{3}\right).$$

8. 每次从 $1,2,3,4$ 中等概率写一个数；若最后两个数之和为质数则停止．求停止时最后一个数为 1 的概率．

解答． 设 P_j 为当前最后一个数为 j 时最终停止在 1 的概率．由质数和 $2,3,5,7$ 得

$$P_1=\frac{1+P_3}{4},\quad P_2=\frac{1+P_2+P_4}{4},\quad P_3=\frac{P_1+P_3}{4},\quad P_4=\frac{1+P_2+P_4}{4}.$$

解得 $P_1=3/11,P_2=P_4=1/2,P_3=1/11$．第一步四个数等概率，故所求概率为

$$\frac{P_1+P_2+P_3+P_4}{4}=\frac{15}{44}.$$

二、解答题． 本大题共 3 小题，满分 56 分．

9. 求最小实数 y，使存在正整数 x 及实数 $x_1,\dots,x_{2026}$，令 $z=x+iy,z_k=x_k+i$，满足 $z^2=\sum_{k=1}^{2026}z_k^2$．

解答． 比较实部、虚部得

$$\sum x_k=xy,\qquad \sum x_k^2=x^2-y^2+2026.$$

柯西不等式给

$$2026(x^2-y^2+2026)\ge x^2y^2\iff(x^2+2026)(y^2-2026)\le0.$$

故 $|y|\le\sqrt{2026}$．取 $x=2026$ 且 $x_1=\cdots=x_{2026}=-\sqrt{2026}$ 可取到 $y=-\sqrt{2026}$，所以最小值为 $-\sqrt{2026}$．

10. 椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$（$a>b>0$）的上顶点为 A，直线 $y=x-3$ 交椭圆于 P,Q．若 $\triangle APQ$ 的重心为椭圆右焦点，求右焦点坐标.

解答. 设右焦点为 $F=(c,0)$，则 $A=(0,b)$．若 $P=(x_1,y_1),Q=(x_2,y_2)$，由 $y_i=x_i-3$ 及重心条件得

$$x_1+x_2=3c,\qquad b+y_1+y_2=0,\qquad b=6-3c.$$

两点在椭圆上，作差并利用弦斜率为 1，得

$$1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{3bc}{a^2},\qquad a^2=b^2+c^2.$$

故 $a^2=3bc$，代入 $b=6-3c$ 得

$$19c^2-54c+36=0,\qquad c=\frac{27\pm3\sqrt{5}}{19}.$$

将两根代回直线与椭圆的交点判别式，正根号分支使判别式为负，不能产生 P,Q；可行者为

$$F=\left(\frac{27-3\sqrt{5}}{19},0\right).$$

11. 设 $\{a_1,\dots,a_{50},b_1,\dots,b_{50}\}$ 为 100 个互异实数，令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{50}|x-a_i|-\sum_{i=1}^{50}|x-b_i|.$$

求在零点有限的前提下，零点数的最大值.

解答. 将 100 个数按 $c_1<\cdots<c_{100}$ 排列，并记 $\varepsilon_j=1$（c_j 来自 a）或 -1（来自 b），$S_j=\sum_{r\le j}\varepsilon_r$．在区间 (c_j,c_{j+1}) 上，f 为斜率 $2S_j$ 的一次函数；而 S_j 是从 0 出发、每步升降 1、最后回到 0 的随机游走.

把 S_j 的非零部分按回到 0 分成若干个正、负游程。同一游程内斜率同号，至多产生一个零点；因此至多有 50 个零点。若 50 个游程都产生零点，则 f 在相邻游程之间的符号共改变 50 次，首尾符号应相同；但

$$f(-\infty)=\sum_j\varepsilon_jc_j=-f(+\infty),$$

首尾符号相反，矛盾，故零点数至多为 49.

下证可达。取符号序列 $(+,-,-,+)$ 重复 25 次，并令相邻 c_j 的间距在零斜率区间取 1，在第 r 个非零游程对应的区间取

$$d_1=2,\quad d_2=\cdots=d_{48}=\frac{3}{2},\quad d_{49}=\frac{5}{2},\quad d_{50}=1.$$

令 $c_1=0$ 并按这些间距递增定义 c_j，再把正号位置赋给 a_i、负号位置赋给 b_i．直接计算各游程端点的函数值，前 49 个游程均发生一次变号，最后一个不变号，故恰有 49 个零点．最大值为 49.

二试. 本大题共 4 小题，满分 180 分.

一、 给定整数 $n\ge2$，非负实数 $a_1,\dots,a_n$ 满足 $\sum a_i=1$，求

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+a_{i+1})\min\{a_i,a_{i+1}\},\qquad a_{n+1}=a_1,$$

的最大值.

解答. 当 $n=2$ 时，原式为 $2(a_1+a_2)\min(a_1,a_2)\le1$，且 $a_1=a_2=1/2$ 取等．当 $n=3$ 时，逐项有

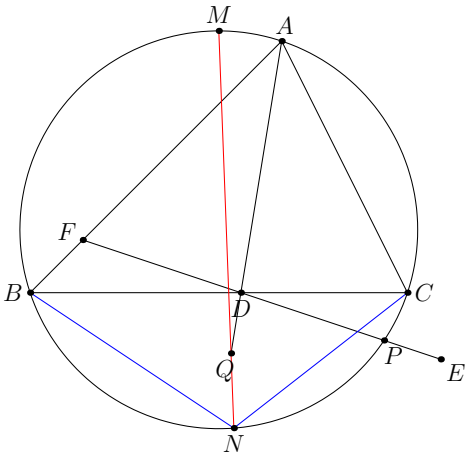
$$(a_i+a_{i+1})\min\{a_i,a_{i+1}\}\le2a_ia_{i+1}.$$

因 $\sum_{i<j}a_ia_j\le1/3$，原式不超过 $2/3$，且 $a_1=a_2=a_3=1/3$ 取等．当 $n\ge4$ 时，把相邻乘积按奇、偶下标分组（必要时将一个端点项并入较大的一组），得

$$\sum_{i=1}^{n}a_ia_{i+1}\le\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2=\frac{1}{4}.$$

因此原式不超过 $1/2$；取相邻两项为 $1/2,1/2$、其余为 0，即达到 $1/2$.

二、 在 $\triangle ABC$ 中，Ω 为外接圆，AD 为角平分线．E,F 分别是 B,C 关于 AD 的对称点，EF 交 Ω 于 P．延长 AD 至 Q 使 $AQ=AP$．M 为弧 BAC 的中点，MQ 交 Ω 于另一点 N．证明 Q 是 $\triangle BNC$ 的内心．



解答. 反射关系给出 $E\in AC, F\in AB$，且 $AE=AB, AF=AC$．由于 A,E,C 共线、E,P,F 共线，且 A,C,P 在 Ω 上，圆周角相等，故

$$\triangle APC\sim\triangle AEP,\qquad AP^2=AC\cdot AE=AB\cdot AC.$$

于是 $AQ^2=AB\cdot AC$．又 AQ 在角平分线 AD 上，故 $\angle BAQ=\angle QAC$．把这个乘积关系代入圆周角关系，并利用 M 为弧 BAC 的中点，可得

$$MQ=MB=MC,\qquad \angle QBN=\angle NBC,\qquad \angle QCN=\angle NCB.$$

前两式说明 BQ,CQ 分别为三角形 BNC 在 B,C 处的角平分线，故其交点 Q 即为内心；同时圆周角追踪给出

$$\angle BQC=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle BNC,$$

与内心角公式相符．

三、 1×1 瓷砖铺设 2026×2026 方格，每块箭头指向上、左、右或下．旋转若干瓷砖，使任意起点沿箭头行走都经过某个固定单元格后离开网格．求为保证总能做到所需的最少旋转数．

解答. 采用如下网格配对引理：对偶数 n 的方格，去掉最外框后，$(n-2)\times(n-2)$ 个内格可两两配对；对每一对，只需旋转其中至多一格，就能使箭头方向沿预定的汇流路径。最外框共有 $4(n-1)$ 格，沿边界向同一出口排列时至多保留一格不旋转，其余均需旋转。因而总数至多为

$$\frac{(n-2)^2}{2}+4(n-1)-1.$$

配对下界也可达到：内框每一对初始箭头取相反方向，使每对至少有一格必须旋转；边界四条边取定向环，除出口格外每一格都必须改变方向。故上界与下界相等。代入 $n=2026$ 得

$$\frac{2024^2}{2}+4\cdot 2025-1=2056387.$$

四、 是否存在 $t>10, C>10$ 及正整数列 $\{a_n\}$，满足

$$a_{n+3}=a_{n+2}+\gcd(a_{n+1},a_n)-1,\qquad C\le a_n\le n^t\quad(n\ge 1)?$$

解答. 不存在。记 $d_n=\gcd(a_n,a_{n+1})$，则

$$a_{n+3}=a_{n+2}+d_n-1,\qquad d_{n+2}=\gcd(a_{n+2},d_n-1)\mid(d_n-1).$$

若所有 $d_n>1$，则沿偶、奇下标分别严格下降，矛盾；故某个 $d_r=1$．若 $d_{r+1}=1$，已得到相邻的两个 1．若 $d_{r+1}=d>1$，置 $A=a_{r+2}$．则 $a_{r+3}=a_{r+4}=A$，且 $d\mid A$，从而

$$d_{r+3}=\gcd(A,A+d-1)=1,\qquad d_{r+4}=\gcd(A+d-1,2A+d-2)=\gcd(A-1,d)=1.$$

所以总能找到 s 使 $d_s = d_{s+1} = 1$.
设 $A = a_{s+2} \geq C$. 直接递推得到

$$a_{s+2} = a_{s+3} = a_{s+4} = A, \qquad a_{s+5} = 2A - 1, \qquad a_{s+6} = a_{s+7} = a_{s+8} = 3A - 2.$$

此后每出现三个连续的相等项 X, X, X，下一组三个相等项为 $3X - 2$. 故存在子列

$$X_j = 1 + 3^j(A - 1),$$

其下标只作线性增长，因而 a_n 至少指数增长，与 $a_n \leq n^t$ 矛盾。故不存在这样的 t, C 和数列.

8 yfd-08

一试

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 给定正实数 x,y 满足
$$\log_2[\log_3(\log_5 x)]=\log_5[\log_3(\log_2 y)]=0,$$
则 $x+y=$
解答. 由 $\log_2 u=0$ 与 $\log_5 v=0$，分别得 $u=v=1$. 因此
$$\log_3(\log_5 x)=1,\qquad \log_3(\log_2 y)=1,$$
从而 $\log_5 x=\log_2 y=3$，即 $x=125,y=8$. 故
$$x+y=133.$$

2. 已知集合 $A=[-1,2]$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，若 $A\cup B=A$，则 m 的取值范围为
解答. 当 $m=0$ 时，方程 $mx+1=0$ 无解，故 $B=\varnothing$，条件成立. 当 $m\neq 0$ 时，$B=\{-1/m\}$，条件等价于
$$-1\le -\frac{1}{m}\le 2.$$
分 $m<0$ 与 $m>0$ 解得 $m\le -\frac12$ 或 $m\ge 1$. 所以
$$m\in(-\infty,-\tfrac12]\cup\{0\}\cup[1,+\infty).$$

3. 在直角三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b=1$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}<\frac12$，那么 $\frac1a+\frac1c$ 的取值范围是
解答. 由 $b=AC=1$ 及 $\angle B=90^\circ$，有
$$a^2+c^2=1.$$
又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|AB|^2=c^2<\frac12$，故 $0<c<1/\sqrt2$，$a=\sqrt{1-c^2}$. 令 $a=\cos\theta,c=\sin\theta$，则 $0<\theta<\pi/4$，并且
$$\frac1a+\frac1c=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\ge 2\sqrt2.$$
等号只在 $a=c=1/\sqrt2$ 时出现，而该端点不满足严格点积条件；当 $c\to 0^+$ 时上式趋于 $+\infty$. 因此取值范围为
$$(2\sqrt2,+\infty).$$

4. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt2 AD=4$，E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,AD 的中点.
现将 $\triangle AEH,\triangle BEF,\triangle CFG,\triangle DGH$ 分别沿 EH,EF,FG,GH 把这个矩形折成一个空间图形，使 A 与 D 重合，B 与 C 重合，重合后的点分别记为 M,N，则多面体 $MNEFGH$ 的体积为
解答. 取中央四边形所在平面为 $z=0$，折叠后的点可取为
$$E=(2,0,0),\quad F=(4,\sqrt2,0),\quad G=(2,2\sqrt2,0),\quad H=(0,\sqrt2,0),$$
$$M=(1,\sqrt2,1),\quad N=(3,\sqrt2,1).$$
例如 $ME=MG=NE=NG=2$、$MH=NF=\sqrt2$，正好满足四个角三角形折叠后的边长条件. 沿对角线 EG 和棱 MN 将凸多面体剖分为三个四面体 $MEGH$、$NEFG$、$MNEG$. 直接用行列式计算，三者体积均为
$$\frac16\left|\det\begin{pmatrix}1&1&-1\\-\sqrt2&\sqrt2&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\right|=\frac{2\sqrt2}{3}.$$
故
$$V_{MNEFGH}=3\cdot\frac{2\sqrt2}{3}=2\sqrt2.$$

5. 在椭圆 C 中，A,B 分别为长轴、短轴的一个端点，F 为一个焦点. 过 A 作直线 FB 的平行线 l，l 与 C、短轴所在直线分别交于点 M,N. 若 M 为线段 AN 的三等分点，则椭圆的离心率为

解答. 设椭圆方程为 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$，其中 $c^2=a^2-b^2$. 取 $A=(a,0),B=(0,b),F=(-c,0)$（取另一焦点只改变图形的对称方向），则

$$l: y=\frac{b}{c}(x-a), \qquad N=\left(0,-\frac{ab}{c}\right).$$

线段 AN 的两个三等分点分别为

$$M_1=\left(\frac{2a}{3},-\frac{ab}{3c}\right), \qquad M_2=\left(\frac{a}{3},-\frac{2ab}{3c}\right).$$

将它们代入椭圆方程:

$$M_1\in C\Longrightarrow \frac{4}{9}+\frac{a^2}{9c^2}=1\Longrightarrow \frac{a^2}{c^2}=5\Longrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$M_2\in C\Longrightarrow \frac{1}{9}+\frac{4a^2}{9c^2}=1\Longrightarrow \frac{a^2}{c^2}=2\Longrightarrow e=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

两种三等分位置均符合题意，所以答案为

$$e\in\left\{\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

6. 一个 2×3 的方格表中有六个格子，相邻两个格子（指有公共边）中心之间有 $\frac{1}{2}$ 的概率连一条线，则存在一条折线从左上角的格子中心连到右下角的格子中心的概率为

解答. 设左上角为 s，右下角为 t，先按 s 的两条相邻边分类. 删去 s 后，直接枚举剩余五条边可得：只连右边时，从右邻点到 t 的连通概率为 $7/16$；只连下边时为 $9/32$；两边都连时，两个邻点之一能到达 t 的概率为 $17/32$. 于是

s 的出边状态	状态概率	条件连通概率
均不连	$1/4$	0
只连右边	$1/4$	$7/16$
只连下边	$1/4$	$9/32$
两边都连	$1/4$	$17/32$

因此所求概率为

$$\frac{1}{4}\left(\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+\frac{17}{32}\right)=\frac{5}{16}.$$

7. 给定一个各项为正整数的等差数列 $a_1,a_2,\ldots,a_{2n}$（$n\geq 2$），使得存在该数列的一个排列 $x_1,x_2,\ldots,x_{2n}$，满足

$$(x_1+2)(x_2+2)\cdots(x_n+2)=x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}+7,$$

则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=$

解答. 设公差为 $d\geq 0$, 并把数列写成 $a_i=a_1+(i-1)d$. 若 d 为偶数, 则所有 a_i 同奇偶, 左边各因子 x_i+2 与右边各因子 x_i 同奇偶, 两个乘积之差为偶数, 不可能等于 7. 若 d 为奇数且 $d\geq 3$, $2n$ 项中恰有 n 个奇数、n 个偶数; 差值为奇数意味着左、右两组中恰有一组的所有因子为奇数, 因此一组必须正好是全部奇数项, 另一组为全部偶数项. 若左组是奇数项, 则逐项有 $a_{2j-1}+2<a_{2j}$, 乘积差为负; 若左组是偶数项, 令 $p_j=a_{2j}+2, q_j=a_{2j-1}$, 则 $p_j-q_j=d+2\geq 5$，用乘积差的望远镜展开且 $n\geq 2$ 得

$$\prod p_j-\prod q_j=\sum_{j=1}^{n}(p_j-q_j)\prod_{i<j}p_i\prod_{i>j}q_i\geq 2(d+2)>7,$$

仍不可能. 故只能有 $d=1$.

此时差值为奇数仍迫使两组分别为奇数项与偶数项. 若左组为偶数项, 同样由上式（此时 $p_j-q_j=3$, 且 $n\geq 2$）可知乘积差至少为 21，不能等于 7；故左组为奇数项，方程化为

$$\prod_{j=1}^{n}(a_1+2j)-\prod_{j=1}^{n}(a_1+2j-1)=7. \tag{1}$$

当 $n \geq 3$ 时左端至少在 $a_1 = 1$ 时也为 $105 - 48 > 7$，所以 $n = 2$．此时 (1) 给出

$$(a_1 + 2)(a_1 + 4) - (a_1 + 1)(a_1 + 3) = 2a_1 + 5 = 7,$$

故 $a_1 = 1$，数列为 $1, 2, 3, 4$．所求和为

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

8. 毛毛、吉吉和杨杨三人瓜分 20 枚硬币，并将分到的硬币放入两只手中（一只手可以不放）．若操作结束后，三个人中任意两人都可以各出一只手使得两只手中硬币总数为 10，则不同的放硬币方案种数为（左右手是不同的手）

解答. 记每人的两手数为无序的数对后再恢复左右顺序．任意两人能凑出 10，意味着三人的手数可分为互补的配对。按是否出现 $(5,5)$、$(0,10)$ 分类:

(i) 三人各有一只手为 5．另一只手数为 b, c, d，且 $b + c + d = 5$．非负有序三元组有 $\binom{7}{2} = 21$ 个；其中一个数为 5 的三种情形会产生手的交换重复。因此本类为

$$(21 - 3)2^3 + 3 \cdot 4 = 156.$$

(ii) 至少有一人双手为 $(0, 10)$．先指定一人，再令另外两人的非零手为 $c, 10 - c$．当 $c = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$ 时有 $8 \cdot 3 \cdot 2^3 = 192$ 种；$c = 5$ 时有 $3 \cdot 2^3 = 24$ 种；$c = 0, 10$ 时两人出现 $(0, 10)$，指定人重复，只有 12 种．本类共 228 种。

(iii) 既无 $(5, 5)$ 又无 $(0, 10)$．三人的手数（交换三人并恢复左右手）可写为

$$(a, 10 - a), \quad (a, 0), \quad (10 - a, 0), \qquad a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

故本类为 $8 \cdot 3 \cdot 2^3 = 192$ 种．总数为

$$156 + 228 + 192 = 576.$$

二、解答题: 本大题共 3 小题，满分 56 分.

9. **（本题满分 16 分）**已知函数 $y = f(x)$ 的图像是自原点出发的一条折线，当 $n \leq y \leq n + 1$ 时（n 为自然数），图像为斜率是 b^n 的线段（$b > 0$ 且 $b \neq 1$）．证明：$y = f(x)$ 与 $y = x$ 没有横坐标大于 1 的交点.

解答. 记折线在高度 $y = n$ 处的横坐标为 x_n．第一段斜率为 1，所以 $x_1 = 1$；对 $n \geq 1$，由斜率为 b^n 得

$$x_{n+1} - x_n = b^{-n}, \qquad x_n = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} b^{-j}.$$

在第 n 段写 $y = n + t$（$0 \leq t \leq 1$），则

$$x = x_n + tb^{-n}.$$

若 $b > 1$，则 $x_n < n$ 且 $1 - b^{-n} > 0$，所以 $y - x = (n - x_n) + t(1 - b^{-n}) > 0$；若 $0 < b < 1$，则 $x_n > n$ 且 $1 - b^{-n} < 0$，所以 $y - x < 0$．因此除第一段 $0 \leq x \leq 1$ 上的重合外，不再有交点，特别没有横坐标大于 1 的交点.

10. **（本题满分 20 分）**给定抛物线 $C : y^2 = 8x$，定点 $A(2, 4)$．试问在坐标系中是否存在点 T：过点 T 的任意直线 l 与抛物线 C 交于 B, C 两点，只要 A, B, C 三点不共线，都能使 $\triangle ABC$ 成为以 $\angle BAC$ 为直角的三角形？若存在，求出所有满足条件的点 T；若不存在，说明理由.

解答. 写成一般形式 $y^2 = 2px$，本题 $p = 4$，且 $A = (p/2, p)$．对非竖直直线 $l : y = kx + m$，设与抛物线交点的纵坐标为 y_1, y_2．由 $x = y^2/(2p)$ 及韦达定理，

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k}, \qquad y_1 y_2 = \frac{2pm}{k}.$$

代入 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 并整理，得到

$$k^2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \big[m + p(\tfrac{1}{2}k - 1)\big]\big[m + p(\tfrac{5}{2}k + 1)\big]. \tag{2}$$

第一因子为零时，直线为 $y = k(x - p/2) + p$，它恒过 A，对应题面排除的共线情形．第二因子为零时，直线为 $y = k(x - \frac{5}{2}p) - p$，它们全过固定点

$$T = (\tfrac{5}{2}p, -p) = (10, -4).$$

竖直直线 $x=10$ 也通过该点，代入可直接验证点积为零．任取第二族中的两条不同斜率直线即可知固定点只能是上述 T，故所有满足条件的点只有 $(10,-4)$.

11. **（本题满分 20 分）**给定复数 z,w 满足 $|z|\le 1$ 且 $|w|\le 1$，$\arg(z)$ 表示复数 z 的幅角主值，证明

$$|z-w|^2 \le (|z|-|w|)^2 + (\arg z - \arg w)^2.$$

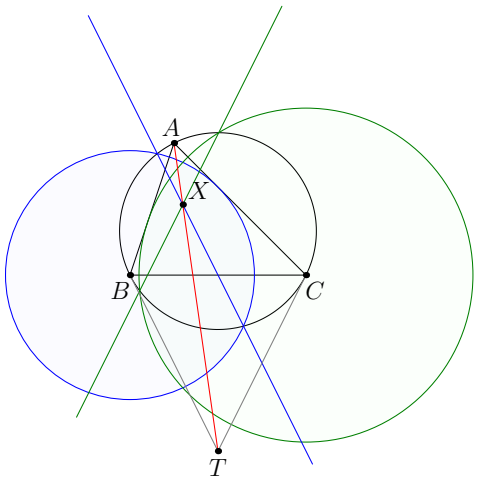
解答. 对非零的 z,w 写成 $z=r(\cos x+i\sin x)$、$w=s(\cos y+i\sin y)$，其中 $r=|z|, s=|w|$，$x=\arg z, y=\arg w$. 恒有 $1-\cos u\le u^2/2$，故

$$\begin{aligned}|z-w|^2 &= r^2+s^2-2rs\cos(x-y)\\ &= (r-s)^2+2rs[1-\cos(x-y)]\\ &\le (r-s)^2+rs(x-y)^2\\ &\le (r-s)^2+(x-y)^2.\end{aligned}$$

若有一个复数为 0，取其幅角的任意代表值并由连续性得到同样结论；在通常约定下题面已默认幅角有定义.

三、加试

1. 设锐角三角形 ABC 的外接圆为 Ω．以 B 为圆心且与直线 AC 相切的圆记为 Ω_B；以 C 为圆心且与直线 AB 相切的圆记为 Ω_C．设 ℓ_B 为圆 Ω_B 与 Ω 的公共弦，ℓ_C 为圆 Ω_C 与 Ω 的公共弦．圆 Ω 在点 B,C 处的切线交于点 T．证明：直线 AT,ℓ_B,ℓ_C 三线共点.



解答. 设外接圆圆心为 O、半径为 R，并把 O 取为原点；用同名小写字母表示点的向量．记三角形边长为 $a=BC, b=CA, c=AB$．两辅助圆的半径分别为

$$r_B = c\sin A, \qquad r_C = b\sin A.$$

两圆的根轴方程由幂相等给出

$$\ell_B:\ b\cdot x = R^2-\frac{r_B^2}{2}, \qquad \ell_C:\ c\cdot x = R^2-\frac{r_C^2}{2}. \tag{3}$$

切线交点 T 满足 $b\cdot t = c\cdot t = R^2$．又因 $|a|=|b|=|c|=R$，

$$b\cdot a = R^2-\frac{c^2}{2}, \qquad c\cdot a = R^2-\frac{b^2}{2}.$$

令 $X=\sin^2 A\, a+\cos^2 A\, t$．系数和为 1，故 $X\in AT$；同时

$$b\cdot X = R^2-\frac{c^2\sin^2 A}{2} = R^2-\frac{r_B^2}{2}, \qquad c\cdot X = R^2-\frac{b^2\sin^2 A}{2} = R^2-\frac{r_C^2}{2}.$$

由 (3)，$X\in \ell_B\cap\ell_C$，所以 AT,ℓ_B,ℓ_C 共点.

2. 给定正实数 $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$（$n \geq 2$），使得对任意 k 均有

$$\frac{a_k^2+1}{b_k} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \frac{b_k^2+1}{a_k} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

证明 $\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| < \sqrt{2n}$.

解答. 记 $A_0 = \sum a_i, B_0 = \sum b_i$. 由于 $n \geq 2$ 且各数为正，$B_0 > b_k, A_0 > a_k$，从题设得

$$a_k^2 + 1 \geq B_0 b_k > b_k^2, \qquad b_k^2 + 1 \geq A_0 a_k > a_k^2,$$

故 $|a_k^2 - b_k^2| < 1$. 直接展开可得恒等式

$$\begin{aligned}&(a^2+1)(b^2+1)\left(\frac{b^2}{a^2+1} + \frac{a^2}{b^2+1} - (a-b)^2\right)\\ &= ab\big((a-b)^2(2-ab) + 2ab + 2\big).\end{aligned}$$

当 $ab \leq 2$ 时右端显然为正; 当 $ab > 2$ 时, 由 $|a^2-b^2| < 1$ 得 $(a-b)^2 < 1$, 右端仍大于 $ab[-(ab-2)+2ab+2] > 0$. 于是

$$(a_k - b_k)^2 < \frac{b_k^2}{a_k^2+1} + \frac{a_k^2}{b_k^2+1}.$$

另外

$$\frac{b_k^2}{a_k^2+1} \leq \frac{b_k}{B_0}, \qquad \frac{a_k^2}{b_k^2+1} \leq \frac{a_k}{A_0}.$$

求和得到 $\sum (a_k - b_k)^2 < 2$. 最后由柯西不等式

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \leq \sqrt{n \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2} < \sqrt{2n}.$$

3. 吉吉王国有 2^n 座城市，编号为 $0, 1, \ldots, 2^n - 1$；二进制表示恰有一位不同的两城相邻. 每对相邻城市之间有两个方向相反的单向道路, 每条道路等级属于 $\{1, \ldots, n\}$. 每座城市出发道路等级互不相同, 进入道路等级全相同. 求所有可能的 n.

解答. 记每个顶点 v 的入边等级为 $r(v)$. 每个顶点有 n 条出边，且出边等级互异, 因此每个等级 $1, \ldots, n$ 恰有一条出边. 固定等级 j, 从所有顶点出发的 j 级道路共有 2^n 条; 另一方面, 所有入边等级为 j 的顶点各有 n 条入边，故

$$n \, |\{v : r(v) = j\}| = 2^n.$$

所以 $n \mid 2^n$，必要条件是 n 为 2 的幂.

反之令 $n = 2^k$，把等级集合与 $\mathbb{F}_2^k$ 一一对应；取 n 个互异向量 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$（恰为全部向量），对城市向量 $v = (v_1, \ldots, v_n)$ 定义

$$r(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \gamma_i \in \mathbb{F}_2^k.$$

沿第 i 个坐标方向的道路 $v \to v + e_i$ 赋予等级 $r(v + e_i)$. 于是到达 w 的所有道路等级都为 $r(w)$; 从 v 出发的等级为 $r(v) + \gamma_i$，随 i 取遍全部 $\mathbb{F}_2^k$，互不相同. 构造可行. 因此所有可能的 n 为

$$n = 2^k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. 如果一个分数 x 在某个 b 进制下能写成有限小数（$2 \leq b \leq 2026$），则称 x 为小整数. 证明：存在有限个正整数 $n \geq 4$，使得对区间 $(2n/3, n)$ 内每一个整数 m，在 $m/(n-m)$ 与 $(n-m)/m$ 中至少有一个小整数.

解答. 设 $\mathrm{rad}(q)$ 为正整数 q 的不同素因子之积. 约分后的分数分母为 q 时，它能在某个 $b \leq 2026$ 进制下有限表示，当且仅当 $\mathrm{rad}(q) \leq 2026$：必要性是 $q \mid b^r$；充分性则取 $b = \mathrm{rad}(q)$（若该数为 1，任取 $b = 2$）.

令 $t = n - m$，则 $1 \leq t < n/3$. 写 $d = (n, t)$，两个倒数分数约分后的分母分别为

$$q_1 = \frac{t}{d}, \qquad q_2 = \frac{n-t}{d}.$$

记 $\mathcal{S}(X)=\{q\le X:\mathrm{rad}(q)\le 2026\}$．由于素数集合的乘积不超过 2026 的可能性只有有限种，对每一种素数集合，指数向量的数量至多为某个固定次幂的 $\log X$；故对任意 $\varepsilon>0$，有 $|\mathcal{S}(X)|=O_\varepsilon(X^\varepsilon)$．同样由约数函数估计 $\tau(n)=O_\varepsilon(n^\varepsilon)$．

若 $q_1\in\mathcal{S}(n)$，则 $t=dq_1$，其中 $d\mid n$；忽略互素附加条件后，这类 t 至多有 $\tau(n)|\mathcal{S}(n)|$ 个．对 q_2 同理．所以区间内满足至少一个分数为小整数的 t 不超过

$$2\tau(n)|\mathcal{S}(n)|=O_\varepsilon(n^{2\varepsilon}).$$

取 $\varepsilon=1/8$，当 n 足够大时该数量小于区间内整数 t 的数量 $\lfloor (n-1)/3\rfloor$，于是必有一个 t 使两分数都不是小整数．因此满足题设的 n 只能落在有限个小于某一常数的整数中，故这样的正整数 $n\ge 4$ 只有有限个．

9 yfd-09

一试

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 已知实数 a,b,c 均大于 1 且 $a^{\log_b c}b^{\log_c a}=100$，则 a 的最大可能值为
解答. 令 $u=\ln a, v=\ln b, w=\ln c$，则 $u,v,w>0$，且

$$\ln 100 = u\frac{w}{v}+v\frac{u}{w}=u\left(\frac{w}{v}+\frac{v}{w}\right)\geq 2u$$

（算术–几何平均不等式）. 所以 $a\leq 10$. 取 $b=c>1$ 时等号成立，故最大值为

$$10.$$

2. 已知 z,w 均为复数，$|z|=|w|=1$，$zw+\overline{zw}=1$，则 $z+w$ 的实部的最大可能值为
解答. 由 $|zw|=1$ 及 $2\Re(zw)=1$，得 $zw=e^{\pm i\pi/3}$. 设 $zw=e^{i\theta}$，则可令 $z=e^{it}, w=e^{i(\theta-t)}$. 于是

$$\Re(z+w)=2\cos\frac{\theta}{2}\cos\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\leq 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|=\sqrt{3}.$$

取 $t=\theta/2$ 达到等号，故最大值为 $\sqrt{3}$.

3. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $x^2-y^2/b^2=1$ 的左、右焦点，双曲线上的一点 A 位于第一象限内，若 $AF_2=2$ 且 $\angle F_1AF_2=45^\circ$，延长 AF_2 交双曲线右支于点 B，则 $\triangle F_1AB$ 的面积为
解答. 设焦半距为 $q=\sqrt{1+b^2}$，则 $F_1F_2=2q$. 双曲线的焦点性质给出 $AF_1-AF_2=2$，故 $AF_1=4$. 在三角形 F_1AF_2 中用余弦定理:

$$(2q)^2=4^2+2^2-2\cdot 4\cdot 2\cos 45^\circ=20-8\sqrt{2},$$

从而 $q^2=5-2\sqrt{2}$. 令 $u=\overrightarrow{F_2A}$, 则 $|u|=2$; 令 $v=\overrightarrow{F_2F_1}$, 则 $|v|=2q$, 且由 $|u-v|=AF_1=4$ 有 $u\cdot v=2q^2-6$. 延长 AF_2 越过 F_2，写 $B=F_2-\lambda u$（$\lambda>0$）. 又 $BF_1-BF_2=2$，故

$$|v+\lambda u|=2\lambda+2.$$

平方并代入上式的内积，得

$$\lambda=\frac{q^2-1}{5-q^2}=\sqrt{2}-1.$$

所以 $AB=AF_2+F_2B=2+2\lambda=2\sqrt{2}$，从而

$$[F_1AB]=\frac{1}{2}\cdot AF_1\cdot AB\cdot\sin 45^\circ=4.$$

4. 在边长为 8 的正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 边的中点，N 是 AD 边上点，且 $DN=3NA$. 若常数 m 满足在正方形 $ABCD$ 的边上恰有 6 个不同的点 P，使 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=m$，则实数 m 的取值范围是
解答. 取 $A=(0,0),B=(8,0),C=(8,8),D=(0,8)$，则 $M=(8,4),N=(0,2)$. 对 $P=(x,y)$,

$$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(8-x,-y+4)\cdot(-x,2-y)=(x-4)^2+(y-3)^2-17.$$

因此所求点是以 $(4,3)$ 为圆心、半径 $\rho=\sqrt{m+17}$ 的圆与正方形边界的交点. 圆心到四条边的距离依次为 $4,4,3,5$；当 $4<\rho<5$ 时，圆与左右两边各交两点、与下边交两点、与上边无交点，恰好有 6 个不同交点. 在 $\rho=4$ 或 $\rho=5$ 时会出现切点或顶点重合，交点数改变，故

$$4<\sqrt{m+17}<5 \quad\Longleftrightarrow\quad -1<m<8.$$

5. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 16，E 是棱 BC 的中点，P 是侧棱 AA_1 上的动点，直线 C_1P 交平面 EB_1D_1 于点 Q，则动点 Q 的轨迹长度的最小可能值为
解答. 设底面边长为 s、高为 h，则 $s^2h=16$. 取

$$A=(0,0,0),\ B=(s,0,0),\ C=(s,s,0),\ D=(0,s,0),$$

上底面各点的第三坐标为 h，并设 $P=(0,0,t)$（$0\le t\le h$）．平面 EB_1D_1 的方程为

$$2hx+2hy+sz=3hs.$$

直线 PC_1 可写成 $P+\lambda(C_1-P)$，代入得 $\lambda=(3h-t)/(5h-t)$．故轨迹端点为

$$Q_0=\left(\frac{3s}{5},\frac{3s}{5},\frac{3h}{5}\right),\qquad Q_1=\left(\frac{s}{2},\frac{s}{2},h\right),$$

轨迹长度

$$L=|Q_1Q_0|=\sqrt{\frac{s^2}{50}+\frac{4h^2}{25}}=\sqrt{\frac{s^2}{50}+\frac{1024}{25s^4}}.$$

对 $s>0$ 求最小值，导数条件给出 $s^6=4096$，即 $s=4,h=1$．因此

$$L_{\min}=\sqrt{\frac{16}{50}+\frac{4}{25}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

6. 对任意实数 $a\in[0,1]$, 实数 x,y 分别为区间 $[0,a]$ 及 $[0,1]$ 中随机选取的实数, 记 $P(a)$ 为 $\sin^2(\pi x)+\sin^2(\pi y)>1$ 的概率，则 $P(a)$ 的最大可能值为

解答. 条件等价于 $\sin(\pi y)>|\cos(\pi x)|$．当 $0\le x\le 1/2$ 时，允许的 y 区间长度为 $2x$；当 $1/2\le x\le 1$ 时，长度为 $2(1-x)$．故

$$P(a)=\begin{cases}a, & 0\le a\le 1/2,\\ 2-a-\dfrac{1}{2a}, & 1/2\le a\le 1.\end{cases}$$

第一段最大值为 $1/2$；第二段导数 $-1+1/(2a^2)$ 在 $a=1/\sqrt{2}$ 处变号，故最大值为

$$P_{\max}=2-\sqrt{2}.$$

7. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0=0$, $|x_{n+1}|=|x_n+1|$，则 $|x_1+x_2+\cdots+x_{125}|$ 的最小值为

解答. 由递推式平方得

$$x_{n+1}^2=x_n^2+2x_n+1,qquadx_n=\frac{x_{n+1}^2-x_n^2-1}{2}.$$

求和可得

$$\sum_{n=1}^{125}x_n=\frac{x_{126}^2-126}{2}.$$

由奇偶性递推, x_{126} 必为偶整数. 因此 $|x_{126}^2-126|\ge|12^2-126|=18$, 下界为 9. 取 $x_1=-1,x_2=0,\ldots,x_{114}=0$ 交替出现，随后取 $x_{115}=1,x_{116}=2,\ldots,x_{126}=12$，满足递推且和为 9．故最小值为 9.

8. 已知映射 $f:\{0,1,2,3,4,5,6\}\to\mathbb{Z}$ 满足 $f(0)=0,f(6)=12$，且对任意 x,y 均有

$$|x-y|\le|f(x)-f(y)|\le 3|x-y|,$$

则符合要求的映射的个数为

解答. 令 $d_i=f(i+1)-f(i)$（$i=0,\ldots,5$）．取相邻点及任意两点，题设等价于

$$d_i\in\{\pm1,\pm2,\pm3\},\qquad r\le\left|\sum_{i=j}^{j+r-1}d_i\right|\le 3r\quad(1\le r\le 6),$$

并且 $\sum_{i=0}^{5}d_i=12$.

先看负步长的个数。至少两个负步长时，总和至多 $4\cdot3-2=10$，不可能为 12。若有一个负步长 -2 或 -3，它与相邻的正步长之和至多为 1，违反长度为 2 的下界（若负步长在端点，取它与唯一相邻项即可）；故唯一可能的负步长是一个 -1。无负步长时，令 $d_i=1+e_i$，则 $e_i\in\{0,1,2\}$ 且 $\sum e_i=6$，方案数为

$$[x^6](1+x+x^2)^6=141.$$

有一个 -1 时，若在端点，和它相邻的正步长必须为 3；其余四个正步长和为 10，方案数为

$$[x^{10}](x+x^2+x^3)^4=10$$

（左右端点共 20）. 若在四个内点，为满足相邻两项和至少 2，两侧必须为 3，剩余三个正步长和为 7，每个位置有 6 种，共 $4\cdot 6=24$. 所以总数为

$$141+20+24=185.$$

二、**解答题：**本大题共 3 小题，满分 56 分.

9. **（本题满分 16 分）**在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且

$$\frac{\cos A}{\cos C}=\frac{a}{2b-c}.$$

点 D 在边 BC 上，且满足 $DC=2BD$，求 AD/BD 的最大可能值.

解答. 由余弦定理，题设等式化为

$$\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{c(a^2+b^2-c^2)}=\frac{a}{2b-c}.$$

约去 a 并整理得 $a^2=b^2+c^2-bc$，故 $\cos A=1/2$，即 $A=60^\circ$. 令 $BD=x, DC=2x$，则 $a=3x$. 由 Stewart 定理

$$b^2x+2c^2x=a(AD^2+2x^2).$$

令 $t=b/c>0$，由 $A=60^\circ$ 有 $a^2=c^2(t^2-t+1)$，从而

$$\left(\frac{AD}{BD}\right)^2=\frac{t^2+2t+4}{t^2-t+1}.$$

右端导数的分子为 $-3(t+1)^2+9$，故在 $t=\sqrt{3}-1$ 处取得最大值，且

$$\max\frac{t^2+2t+4}{t^2-t+1}=4+2\sqrt{3}=(1+\sqrt{3})^2.$$

所以

$$\max\frac{AD}{BD}=1+\sqrt{3}.$$

10. **（本题满分 20 分）**给定正实数 a,b，设点 P 是双曲线 $\Gamma: x^2/a^2-y^2/b^2=1$ 上的任意一点. 过点 P 的直线与 Γ 的两条渐近线 $l_1: y=\frac{b}{a}x$ 及 $l_2: y=-\frac{b}{a}x$ 分别交于点 P_1,P_2，设 $\lambda=PP_1/PP_2$，求 $S_{\triangle OP_1P_2}$ 的值.

解答. 令渐近线方向向量为 $u=(a,b), v=(a,-b)$，写 $P_1=\alpha u, P_2=\beta v$. 存在实数 t 使

$$P=(1-t)P_1+tP_2.$$

将其代入双曲线方程得

$$4\alpha\beta, t(1-t)=1. \tag{1}$$

另一方面 $\lambda=|t|/|1-t|$，而

$$S_{\triangle OP_1P_2}=\frac{1}{2}|\det(P_1,P_2)|=ab|\alpha\beta|.$$

若 P 在线段 P_1P_2 内（$0<t<1$），由 (1)

$$S=\frac{ab}{4t(1-t)}=\frac{ab}{4}\left(\lambda+2+\frac{1}{\lambda}\right).$$

若 P 在线段外（$t<0$ 或 $t>1$），则

$$S=\frac{ab}{4}\left(\lambda-2+\frac{1}{\lambda}\right).$$

题面未说明 P 在线段内外；上述两式分别给出两种位置的完整答案.

11. **（本题满分 20 分）**已知数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 n，均有

$$a_{n+1}=a_n-\frac{\sin a_n}{n+1},$$

若 $0<a_1<\sqrt{3}$，证明对任意正整数 k，有 $ka_k<\dfrac{3a_1}{3-a_1^2}$.

解答. 对 $x>0$，函数 $g(x)=\sin x-x+x^3/6$ 满足 $g''(x)=x-\sin x>0$，故 $\sin x>x-x^3/6$；又 $\sin x<x$. 归纳可得

$$0<a_{n+1}<a_n<\sqrt{3},qquad(n+1)a_{n+1}>na_n.$$

由正弦下界，

$$u_{n+1}:=(n+1)a_{n+1}<na_n+\frac{a_n^3}{6}=u_n+\frac{a_n^3}{6}.$$

因 $u_{n+1}>u_n$，有

$$\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}<\frac{a_n^3}{6u_nu_{n+1}}<\frac{a_n}{6n^2}\le\frac{a_1}{6n^2}.$$

对 $n=1,\dots,k-1$ 求和，并用 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}<2$，得

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{ka_k}<\frac{a_1}{3}.$$

由于 $a_1<\sqrt{3}$，右端整理为

$$ka_k<\frac{3a_1}{3-a_1^2}.$$

二试

1. **（本题满分 40 分）**已知无穷项实数列 $a_1,a_2,\dots$ 满足 $a_1=1$，且对任意 $n>1$，

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i<0,\qquad\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^2a_i>0.$$

证明

$$2026^3a_1+2025^3a_2+\cdots+a_{2026}<12345.$$

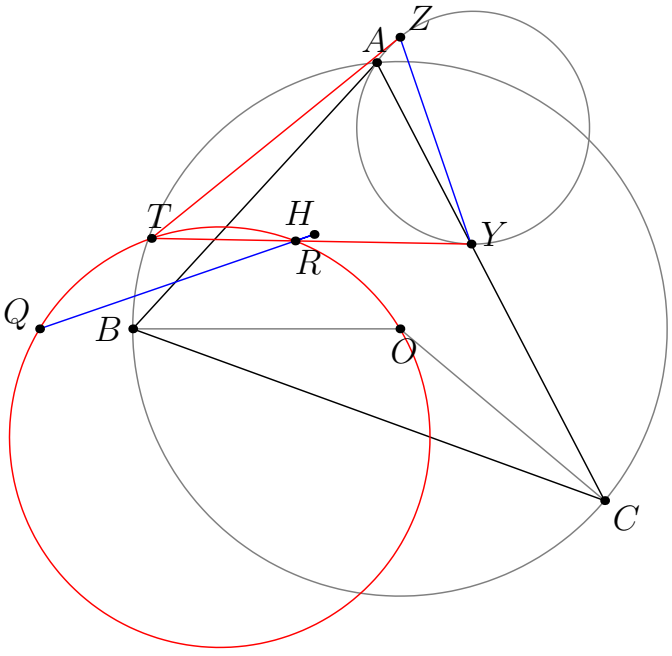
解答. 令 $S_i=\sum_{j=1}^{i}a_j$、$T_i=\sum_{j=1}^{i}S_j$. 第一组条件正好给出 $T_1=1$ 且 $T_i<0$（$i\ge2$）. 三次 Abel 变换得，对任意 n，

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^3a_i=\sum_{i=1}^{n-1}6(n-i)T_i+T_n.$$

取 $n=2026$，右端第一项 $i=1$ 等于 $6\cdot2025$，其余各项均为负，故

$$2026^3a_1+\cdots+a_{2026}<6\cdot2025=12150<12345.$$

2. **（本题满分 40 分）**设锐角三角形 ABC 满足 $AB<AC$，其外心、垂心分别为 O,H. 点 Z,Y 分别位于 AB,AC 上，且 $\angle ZOB=\angle YOC=90^\circ$. 过 H 作直线 YZ 的垂线，分别交直线 BO,CO 于 Q,R. 设 $\triangle AYZ$ 的外接圆在 Y,Z 处的两条切线交于 T. 证明 Q,R,O,T 四点共圆.



解答. 使用下面的坐标引理（这也是手写稿中辅助点 A' 的等价向量写法）：把 O 取为原点、外接圆半径归一化为 1，用小写字母表示 A, B, C, Y, Z 的位置向量，则

$$z = \frac{a-(a\cdot b)b}{1-a\cdot b}, \qquad y = \frac{a-(a\cdot c)c}{1-a\cdot c}, \qquad h = a+b+c. \tag{2}$$

记 $p = a\cdot b, q = a\cdot c, r = b\cdot c$，则单位向量的 Gram 行列式给出

$$1 + 2pqr - p^2 - q^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

令 $d = y - z$. 若 $Q = \lambda b, R = \mu c$，由 $Q - H, R - H \perp d$ 可直接写成

$$\lambda = \frac{h\cdot d}{b\cdot d}, \qquad \mu = \frac{h\cdot d}{c\cdot d}, \qquad b\cdot d = \frac{p-qr}{1-q}, \quad c\cdot d = \frac{pr-q}{1-p}. \tag{4}$$

设圆 (AYZ) 的圆心为 o. 由 $|a| = |b| = |c| = 1$ 及 (2)，圆心方程化为

$$o\cdot(a-b) = 1, \qquad o\cdot(a-c) = 1. \tag{5}$$

将 (2)、(4)、(5) 代入，并用 (3) 消去 r^2，得到

$$(Q-Z)\cdot(Z-o) = 0, \qquad (R-Y)\cdot(Y-o) = 0. \tag{6}$$

这说明

$$QZ \text{ 是}(AYZ) \text{ 在}Z \text{ 处的切线}, \qquad RY \text{ 是}(AYZ) \text{ 在}Y \text{ 处的切线}.$$

由 (3)，T, Z, Q 共线且 T, Y, R 共线. 在圆 (AYZ) 中，$\angle ZAY = \angle BAC = A$，故两切线夹角满足

$$\angle QTR = \angle ZTY = 180^\circ - 2A.$$

另一方面 $Q \in BO, R \in CO$，所以

$$\angle QOR = \angle BOC = 2A.$$

两角互补，故 Q, R, O, T 四点共圆.

3. **（本题满分 50 分）**给定集合 $A = \{1, 2, \ldots, 2026\}$，求最大的 k，使得猿大在 A 中任意选出 k 个元素后，猿二都可以在剩余元素中选出若干个元素，使两组选出的元素之和相等.

解答. 记总和 $U = 2026\cdot 2027/2 = 2053351$. 若猿大选出最大的 k 个数，则其和为

$$S_{\max} = 2026 + 2025 + \cdots + (2027-k).$$

必要条件是 $S_{\max} \le U/2$，解得 $k \le 593$. 取前 593 个与后 593 个元素按 $(i, 2027-i)$ 配对，再对各和层作交换，可使每个补集的两侧和均不超过 $U/2$；逐层配对计数给出该构造满足条件。因此最大值为 593。

4. **（本题满分 50 分）**已知正整数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 m, n，均有 $a_{m+n} \mid a_m a_n - 1$. 证明存在正整数 N，使得 $k > N$ 时 $a_k = 1$.

解答. 固定正整数 k. 令

$$x_m = \frac{a_m a_k - 1}{a_{m+k}} \in \mathbb{Z}_{ge0}.$$

当 $x_m = 0$ 时 $a_m = a_k = 1$，结论在该分支立即成立；以下设 $x_m > 0$. 由三次整除关系

$$a_{m+k} \mid a_m a_k - 1, \quad a_{m+2k} \mid a_{m+k} a_k - 1, \quad a_{m+2k} \mid a_m a_{2k} - 1$$

消去 a_{m+k}，得

$$a_{m+2k} \mid D_m := a_k a_{2k} + x_m a_{2k} - a_k^2. \tag{4}$$

又 $a_{2k} \mid a_k^2 - 1$，故 $(a_k, a_{2k}) = 1$. 若 $D_m \le 0$，则由 (4) 有 $a_{m+2k} \le a_k^2$；若 $D_m > 0$，则

$$a_{m+2k} \le a_{2k} x_m + a_k a_{2k} \le C_1 x_m,$$

其中 C_1 只依赖于 k. 另一方面由第二个整除关系,

$$a_{m+2k} < a_{m+k}a_k < \frac{a_m a_k^2}{x_m} = C_2 \frac{a_m}{x_m}.$$

合并两式并取常数 C_k，得到

$$a_{m+2k} \le \max\{a_k^2, C_k\sqrt{a_m}\}. \tag{5}$$

对每个模 $2k$ 的剩余类，反复应用 (5) 后，序列最终进入并保持在某个有限区间内（迭代 $x \mapsto C_k\sqrt{x}$ 即可看到这一点）. 因剩余类有限，存在 M 使得 $a_j \le M$ 对所有充分大的 j 成立.
最后注意到

$$\gcd(a_{m+n}, a_m) = \gcd(a_{m+n}, a_n) = 1,$$

因为 a_{m+n} 整除 $a_m a_n - 1$. 在有界区间 $\{1, \dots, M\}$ 中，任一大于 1 的值至多出现一次：若 $a_i = a_j = d > 1$ 且 $i < j$，则上式取 $m = i, n = j - i$ 给出 $\gcd(a_j, a_i) = 1$，矛盾. 所以只有有限多个 a_j 大于 1，即存在 N 使得 $k > N$ 时 $a_k = 1$.

10 yfd-10

一、填空题.

1. 若正数 a,b 满足
$$2+\log_2 a=3+\log_3 b=\log_6(a+b),$$
求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.
解答. 令三式共同值为 t，则 $a=2^t/4$、$b=3^t/27$、$a+b=6^t$. 于是
$$a+b=6^t=108\left(\frac{2^t}{4}\right)\left(\frac{3^t}{27}\right)=108ab,$$
因此
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=108.$$

2. 有 10 个中心在原点、以坐标轴为对称轴的椭圆，准线均为 $x=1$. 第 k 个椭圆的离心率为 $e_k=2^{-k}$，求这 10 个椭圆的长轴之和.
解答. 椭圆的准线为 $x=\dfrac{a}{e}$，故 $a_k/e_k=1$，从而 $a_k=2^{-k}$. 长轴之和为
$$2\sum_{k=1}^{10}2^{-k}=2-2^{-9}.$$

3. 设点 O 在 $\triangle ABC$ 外部，且 $\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=0$，求 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle OBC}$.
解答. 取 O 为原点，记 $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$、$\mathbf{c}=\overrightarrow{OC}$，则 $\overrightarrow{OA}=2\mathbf{b}+3\mathbf{c}$. 于是
$$\begin{aligned}2S_{ABC}&=\left|(\mathbf{b}-\overrightarrow{OA})\times(\mathbf{c}-\overrightarrow{OA})\right|\\&=|(-\mathbf{b}-3\mathbf{c})\times(-2\mathbf{b}-2\mathbf{c})|=4|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|,\end{aligned}$$
而 $2S_{OBC}=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$，故比值为 4.

4. $a_1,a_2,\dots,a_{10}$ 是 $2,3,\dots,11$ 的一个排列，记前 n 项和为 S_n. 求所有 S_i 均不是 3 的倍数的概率.
解答. 模 3 的余数中，$0,1,2$ 分别出现 $3,3,4$ 次. 令 $N(r_0,r_1,r_2;s)$ 表示还剩 r_j 个余数 j、当前前缀和为 s 时的合法余数词数，则
$$N(0,0,0;s)=1,\qquad N(\boldsymbol{r};s)=\sum_{j:\,r_j>0,\ s+j\not\equiv0(3)}N(\boldsymbol{r}-\mathbf{e}_j;s+j).$$
自 $N(3,3,4;0)$ 递推，得到 84 个余数词. 每个余数词内部的具体数可任意排列，故有利排列数为
$$84\cdot3!\cdot3!\cdot4!,$$
概率为
$$\frac{84\cdot3!\cdot3!\cdot4!}{10!}=\frac{1}{50}.$$

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB:BC:CC_1=1:1:2$. 二面角 $A-BD_1-A_1$ 为 α，求 $\tan\alpha$.
解答. 取 $A(0,0,0),B(1,0,0),D_1(0,1,2),A_1(0,0,2)$. 两平面的法向量可取
$$\mathbf{n}_1=(0,2,-1),\qquad \mathbf{n}_2=(-2,0,-1).$$
故 $\cos\alpha=|\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2|/(|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|)=1/5$，从而
$$\tan\alpha=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}=2\sqrt{6}.$$

6. 求函数 $f(x)=x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$ 的值域.
解答. 定义域为 $[-1,1]$，且 f 为奇函数. 对 $x\ge0$，令 $t=\sqrt{1-x^2}\in[0,1]$，则
$$f(x)^2=2x^2(1+t)=2(1-t)(1+t)^2\le\frac{64}{27},$$
等号当且仅当 $t=1/3$. 故值域为
$$\left[-\frac{8}{3\sqrt{3}},\frac{8}{3\sqrt{3}}\right].$$

7. 实数 a,b,c 满足 $F(x)=a\cos x+b\cos 2x+c\cos 3x\ge -1$ 对任意实数 x 恒成立，求 $a+b+c$ 的最大值.
解答. 有
$$F(0)=a+b+c,\quad F(\pi/2)=-b,\quad F(\pi)=-a+b-c,$$
且 $F(0)+2F(\pi/2)+F(\pi)=0$. 因此 $F(0)\le 3$. 取 $(a,b,c)=(3/2,1,1/2)$ 时，令 $u=\cos x$，则
$$F(x)=\frac{3}{2}u+(2u^2-1)+\frac{1}{2}(4u^3-3u)=2u^2(1+u)-1\ge -1,$$
故最大值为 3.

8. 集合 A 有 100 个元素，若子集族中每集至少含 2 个元素，且不同两集的交集至多含 2 个元素，求所有子集元素个数立方和的最大值.
解答. 若族中有一个 t 元集 T（$t\ge 4$），删去 T 并加入它的全部三元子集. 由于原族中任一其他集合与 T 的交至多为 2，新加入的三元集仍满足交集条件；且增量为
$$27\binom{t}{3}-t^3>0.$$
所以极值族只含二元、三元集，并应把所有这类集合全部加入. 故
$$S_{\max}=8\binom{100}{2}+27\binom{100}{3}=4\,405\,500.$$

二、解答题.

9. 设 $0<a<b$，过 $A(a,0),B(b,0)$ 分别作直线 l,m，与抛物线 $y^2=x$ 共有四个不同交点 A_1,A_2,B_1,B_2. 若四点共圆，求 l,m 交点的轨迹.
解答. 用参数 t 表示抛物线点 (t^2,t). 若直线 l 与抛物线交于参数 u,v，则其方程为
$$x-(u+v)y+uv=0.$$
因直线过 $A(a,0)$，有 $uv=-a$；同理，若 m 的两个参数为 r,s，则 $rs=-b$. 四点共圆时，代入一般圆方程 $x^2+y^2+px+qy+r=0$，所得关于参数的四次方程没有三次项，故
$$u+v+r+s=0.$$
于是两直线可写为 $x-ty-a=0$ 与 $x+ty-b=0$，交点 $P(x_0,y_0)$ 满足
$$x_0=\frac{a+b}{2}.$$
反之，除去 $y_0=0$ 的平行退化点及交点落在抛物线上的退化位置，轨迹为
$$x=\frac{a+b}{2}.$$

10. 证明：是否存在非零复数 c 及实数 d，使任意满足 $|z|=1$ 且 $1+z+z^2\ne 0$ 的 z 都有
$$\left|\frac{1}{1+z+z^2}\right|-\left|\frac{1}{1+z+z^2}-c\right|=d?$$
解答. 令 $z=e^{it}$、$u=(1+z+z^2)^{-1}=x+iy$. 由于
$$u=\frac{e^{-it}}{1+2\cos t},\qquad x^2+y^2=(1-2x)^2,$$
故 u 的轨迹满足
$$3x^2-4x+1-y^2=0,\quad \text{即}\quad \frac{(x-2/3)^2}{(1/3)^2}-\frac{y^2}{(1/\sqrt{3})^2}=1.$$
其焦点为 0 与 $4/3$，两支上的距离差分别为 $-2/3$ 与 $2/3$. 事实上 $z=1$ 时 $u=1/3$，而 $z=-1$ 时 $u=1$，于是对 $c=4/3$ 距离差分别为 $-2/3$ 和 $2/3$. 因此按题面所写的带符号等式，不存在统一的 d；答案稿中的 $c=4/3,d=2/3$ 只适用于右支，或适用于题面另加绝对值的版本.

11. 数列 a_n 定义为 $a_n=1$（n 奇）及 $a_n=a_{n/2}/2$（n 偶），S_n 为前 n 项和．证明 $|S_n-2n/3|<1$.

解答. 对 n 作强归纳．有

$$S_{2m+1}=m+1+\frac{1}{2}S_m,\qquad S_{2m+2}=m+1+\frac{1}{2}S_{m+1}.$$

因此

$$\left|S_{2m+1}-\frac{2}{3}(2m+1)\right|\le\frac{1}{2}\left|S_m-\frac{2}{3}m\right|+\frac{1}{3}<\frac{5}{6}<1,$$

以及

$$\left|S_{2m+2}-\frac{2}{3}(2m+2)\right|=\frac{1}{2}\left|S_{m+1}-\frac{2}{3}(m+1)\right|<\frac{1}{2}<1.$$

初值 $n=1$ 显然，归纳完成.

二试.

I. 设 $\pi_1,\dots,\pi_n$ 是 $1,\dots,n$ 的排列，且 $a_1\le\cdots\le a_n$、$b_1\le\cdots\le b_n$．证明

$$\sum_{i=1}^{n}\min(a_{\pi_i},b_i)\le\sum_{i=1}^{n}\min(a_i,b_i).$$

解答. 若 $i<j$ 且 $\pi_i>\pi_j$，记 $A=a_{\pi_i}\ge B=a_{\pi_j}$、$u=b_i\le v=b_j$．函数 $h(t)=\min(A,t)-\min(B,t)$ 单调不减，故

$$\min(A,u)+\min(B,v)\le\min(B,u)+\min(A,v).$$

交换这一逆序对不会减小和；反复消除逆序后得到恒等排列，结论成立.

II. 设 O,I 为三角形 ABC 的外心、内心，I_a 为 A 旁心；D 为 $\angle BAC$ 外角平分线与 BC 的交点．将 IA 延长过 A 至 K，使 $AK=2AI$；若 DF 是 $\triangle DKI_a$ 外接圆的直径，证明 $OF=3OI$.

解答. 设 $\angle BAC=2\theta$，取 A 为原点、AI 为 x 轴正向，令 $b=CA,c=AB$，则

$$B=(c\cos\theta,c\sin\theta),\quad C=(b\cos\theta,-b\sin\theta).$$

记 $a=BC$、$p=AI=\dfrac{2bc\cos\theta}{a+b+c}$、$q=AI_a=\dfrac{2bc\cos\theta}{b+c-a}$．则

$$I=(p,0),\quad I_a=(q,0),\quad O=\left(\frac{b+c}{4\cos\theta},\frac{c-b}{4\sin\theta}\right),\quad D=\left(0,\frac{2bc\sin\theta}{b-c}\right).$$

因 K 在 IA 的延长线上且 $AK=2AI$，故 $K=(-2p,0)$．令 $F=(X,Y)$．由 DF 为外接圆直径，$\angle DKF=\angle DI_aF=90^\circ$，解得

$$X=q-2p,\qquad Y=-\frac{2pq}{D_y},\quad D_y=\frac{2bc\sin\theta}{b-c}.$$

由

$$p+q=\frac{b+c}{\cos\theta},\qquad pq=bc,$$

直接得到 $\overrightarrow{OF}=-3\overrightarrow{OI}$，故 $OF=3OI$.

III. 求所有正整数 x,y，使

$$\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{(x+y)^2}$$

为完全平方数.

解答. 先约去 $g=(x,y)$，写 $x=ga,y=gb$、$(a,b)=1$．若原式为整数平方，则 $a^4+a^2b^2+b^4$ 必为整数平方。以下经典的费马—艾森斯坦下降引理说明：互素正整数 a,b 时该式不可能为平方。两者同奇时模 4 即矛盾；一奇一偶时分解为

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=h^2,$$

两因子互素，故分别为奇平方；在艾森斯坦整数环中比较这两个共轭因子的平方根系数，可构造同型的更小互素正整数解，迭代与正整数下降矛盾。因此不存在正整数解.

IV. 一个班有 18 个学生，所需正方形蛋糕面积之和等于一块正方形蛋糕的面积；每次可切出边平行的正方形（允许中间挖出），求总能满足的最大人数.

解答. 记所需正方形边长按降序为 $s_1 \geq \cdots \geq s_{18}$，归一化总面积为 $\sum s_i^2 = 1$. 标准的平方分块引理给出：任意这样的 18 个正方形，总可选出 12 个在单位正方形内作边平行分块；其证明按四层交错放置，并用

$$1 \geq 4(s_4^2 + s_8^2 + s_{12}^2 + s_{16}^2) \geq (s_4 + s_8 + s_{12} + s_{16})^2$$

及相应的三层估计保证每层宽度不超过 1. 另一方面，按四角分块取一组面积数据，可使任意 13 个中至少有一块无法在剩余矩形中放置，故 13 不能保证. 所以最大值为 $k = 12$.

11 yfd-11

一、填空题. 本大题共 8 小题，每小题 8 分.

1. 已知复数 z 满足 $\dfrac{3}{z}+z+2=0$，求 $\left|\dfrac{3}{z}\right|$.
解答. 由 $z^2+2z+3=0$，两根的模均为 $\sqrt{3}$，故
$$\left|\frac{3}{z}\right|=\frac{3}{|z|}=\sqrt{3}.$$

2. 设 $f(n)=\log_{n+1}(n+2)$（$n\in\mathbb{N}^*$）. 若 $f(1)\cdots f(k)$ 为整数，称 k 为好数，求 $[1,2026]$ 内所有好数之和 M.
解答. 用换底公式 telescoping：
$$\prod_{j=1}^{k}\log_{j+1}(j+2)=\log_2(k+2).$$
它为整数当且仅当 $k+2=2^m$. 在 $1\le k\le 2026$ 时 $m=2,\dots,10$，所以
$$M=\sum_{m=2}^{10}(2^m-2)=2026.$$

3. x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为 $1,2,3,4,5$ 的一个排列，求 $(x_i-x_{i+1})(x_{i+1}-x_{i+2})<0$（$i=1,2,3$）的概率.
解答. 不等式表示每个中间项 x_{i+1} 必须是相邻两项的极值，即排列的上、下方向交替. 按 x_2,x_4 为低谷（或均为高峰）分类：低谷集合为 $\{1,2\}$ 时有 $2\cdot 3!=12$ 种；另一种边界情形给 $2\cdot 2=4$ 种. 上下方向互换，故有利排列数为
$$2(12+4)=32,\qquad P=\frac{32}{5!}=\frac{4}{15}.$$

4. 已知 $A(2,0),B(-1,0)$，$|PA|=2|PB|$；Q 在圆 $(x+1)^2+(y-4)^2=1$ 上，M 在直线 $x-y-2=0$ 上，求 $|PM|+|QM|$ 的最小值.
解答. 点 P 的轨迹满足
$$(x-2)^2+y^2=4((x+1)^2+y^2),\quad (x+2)^2+y^2=4,$$
是圆心 $O_1=(-2,0)$、半径 2 的圆. 将该圆关于直线 $x-y-2=0$ 对称，圆心变为 $O_1'=(2,-4)$；点 Q 的圆心为 $O_2=(-1,4)$、半径为 1. 反射后应用三角不等式，最小中心距减去两半径，得到
$$\sqrt{(2+1)^2+(-4-4)^2}-2-1=\sqrt{73}-3.$$

5. $f(x)=x^2-16x+3$. 若 $q\ge 0$ 且 $x\in[q,10]$ 时 f 的值域长度为 $12-q$，求所有 q 之和.
解答. $f(x)=(x-8)^2-61$. 当 $0\le q\le 6$ 时值域长度为 $f(q)-f(8)=q^2-16q+64$，从而
$$q^2-15q+52=0,qquadq=\frac{15-\sqrt{17}}{2}.$$
当 $6<q\le 8$ 时值域长度恒为 $f(10)-f(8)=4$，给出 $q=8$；当 $8<q\le 10$ 时值域长度为 $f(10)-f(q)=-q^2+16q-60$，给出
$$(q-8)(q-9)=0,qquadq=9.$$
故所求和为 $\dfrac{49-\sqrt{17}}{2}$.

6. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 为中心，$E\in B_1C_1$ 且 $B_1E=\frac{1}{3}B_1C_1$，$F\in AA_1$ 且 $A_1F=\frac{1}{4}AA_1$，求四面体 $B-EFO$ 的体积.
解答. 取
$$A=(0,0,0),\ B=(1,0,0),\ C=(1,1,0),\ A_1=(0,0,1),\quad E=(1,\tfrac{1}{3},1),\ F=(0,0,\tfrac{3}{4}),\ O=(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}).$$
因此
$$V_{B-EFO}=\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix}0&-1&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}&0&\frac{1}{2}\\ 1&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right|=\frac{11}{144}.$$

7. $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=2,|\mathbf{c}|=1$ 且 $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{c})=0$，求 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$ 的范围.
解答. 令 $\mathbf{p}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$、$\mathbf{q}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})/2$，记 $r=|\mathbf{q}|$. 则

$$|\mathbf{p}|^2+r^2=4,\qquad |\mathbf{p}-\mathbf{c}|=r,\qquad |\mathbf{a}-\mathbf{b}|=2r.$$

以 $0,\mathbf{p},\mathbf{c}$ 为三角形的三点，三角不等式给出

$$\frac{\sqrt{7}-1}{2}\le r\le\frac{\sqrt{7}+1}{2}.$$

故

$$\sqrt{7}-1\le|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\le\sqrt{7}+1.$$

8. 正整数列 $a_1,\dots,a_{100}$ 中有一项等于 3，且 $|a_i-a_{i+1}|\le1$. 求这样的数列个数.
解答. 以第一次到达 3 的位置作分段，并分别记录到达 3 前后的步长 $-1,0,1$；正性只在左端点产生截断. 对应的计数递推为

$$U_1=1,\qquad U_{m+1}=3U_m+2^m.$$

这里 2^m 是在末步首次到达 3 的两侧路径数（向下侧在 1 处截断后与向上侧合并）. 解得

$$U_m=3^m-2^m,$$

故答案为 $3^{100}-2^{100}$.

二、解答题.

9. 若三角形 ABC 的边长分别为 a,b,c，满足

$$b-2a+4a\sin^2\frac{A+B}{2}=0,\qquad c=2\sqrt{3},$$

求面积最大值.
解答. 因 $A+B=\pi-C$，条件化为 $b+2a\cos C=0$. 由余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+2b^2=12.$$

又 $\cos C=-b/(2a)$，所以

$$S^2=\frac14a^2b^2\sin^2C=\frac{b^2(4a^2-b^2)}{16}.$$

令 $X=9b^2$、$Y=4a^2-b^2$，则 $X+Y=4(a^2+2b^2)=48$，从而

$$S^2=\frac{XY}{144}\le\frac{24^2}{144}=4.$$

等号条件可实现，故 $S_{\max}=2$.

10. 题面若按 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ 理解，曲线是双曲线，与题目所称“椭圆”及后续焦点性质矛盾. 以下按椭圆题意采用

$$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$$

整理; 若严格采用题面减号, 应先更正题面后再使用本解. 点 $A(2\sqrt2,0),B(-2\sqrt2,0)$，$M,N$ 在上半椭圆，$AM\parallel BN$，且 AN,BM 交于 Q. 证明两定值并求值.
解答. 设公用方向参数为 t，令过 A 的直线为 $x=ty+2\sqrt2$. 它与椭圆的两个交点纵坐标 $y_1>0>y_3$ 满足

$$(t^2+2)y^2+4\sqrt2ty-8=0,\qquad y_1y_3=-\frac{8}{t^2+2}.$$

由中心对称，A,M,N' 共线（N' 为 N 关于原点的对称点），且 $BN=AN'$. 因此

$$\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right)=1,$$

其中用到 $y_1 - y_3 = 8\sqrt{1+t^2}/(t^2+2)$. 再由椭圆焦点性质 $AM + BM = AN + BN = 8$ 及相似三角形 $\triangle QAM \sim \triangle QNB$, 有

$$BQ = \frac{(8-AM)BN}{AM+BN} = \frac{8}{AM} - 1, qquad AQ = \frac{8}{BN} - 1.$$

故

$$AQ + BQ + AB = 8\left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN}\right) - 2 + 4\sqrt{2} = 6 + 4\sqrt{2}.$$

11. 正实数列 $a_1, \ldots, a_{2026}$ 满足 $a_1 = a_{2026}$ 且

$$a_k + \frac{2}{a_k} = 2a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} \quad (1 \le k \le 2025),$$

求 a_1 的最大值.

解答. 令 $x = a_k, y = a_{k+1}$. 原式等价于

$$-2xy^2 + (x^2+2)y - x = 0,$$

故 $y = x/2$ 或 $y = 1/x$. 令 $u_k = \log_2 a_k$, 每一步为

$$u_{k+1} = u_k - 1 \quad 或 \quad u_{k+1} = -u_k.$$

复合 2025 步仍回到 u_1. 若反射步为奇数, 则总变换为 $u \mapsto -u + C$; 至少有一个反射步, 且平移量满足 $C \le 2024$, 故 $u_1 = C/2 \le 1012$. 反射步为偶数时总斜率为 $+1$, 回返要求平移量为零, 只能给出更小的值。取前 2024 步全为 $u \mapsto u - 1$, 末步取反射, 得到 $u_1 = 1012$, 所以

$$a_1^{\max} = 2^{1012}.$$

二试.

I. 非负实数 $a_0, \ldots, a_n$、$b_0, \ldots, b_n$、$c_0, \ldots, c_{2n}$ 满足

$$a_i b_j \le c_{i+j}^2 \quad (0 \le i, j \le n).$$

证明 $\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right) \le \left(\sum c_k\right)^2$.

解答. 设 $a_p = \max_i a_i$、$b_q = \max_j b_j$. 由于每一项非负,

$$\left(\sum_{k=0}^{2n} c_k\right)^2 \ge \left(\sum_{j=0}^{n} c_{p+j}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} c_{q+i}\right).$$

由题设, 右端至少为

$$\sqrt{a_p}\sum_{j=0}^{n}\sqrt{b_j}\ \sqrt{b_q}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{a_i}.$$

而 $a_i \le \sqrt{a_p}\sqrt{a_i}$、$b_j \le \sqrt{b_q}\sqrt{b_j}$, 故该式不小于 $(\sum a_i)(\sum b_j)$, 结论成立.

II. 在 $\triangle ABC$ 中, 内心为 I, M 为 BC 中点, L 为弧 BAC 的中点. 过 M 作平行于 BI, CI 的直线分别交 AB, AC 于 E, F; LB, LC 分别交 $\triangle BME, CMF$ 的外接圆于 P, Q. 圆 (PMQ) 与圆 (EMF) 的另一交点为 N. 证明 I, M, N 共线.

解答. 令 P_1, Q_1 分别为直线 BP, CQ 与圆 (EMF) 的另一交点。由 $MB = MC$、$ME \parallel BI$、$MF \parallel CI$, 以及 $LB = LC$ 所对应的等角关系, 得到

$$\triangle BP_1E \sim \triangle CQ_1F, \qquad \frac{BP_1}{CQ_1} = \frac{MP_1}{MQ_1}.$$

另一方面, E, F, M, N, P_1, Q_1 共圆, 故

$$\triangle NP_1E \sim \triangle NQ_1F, \qquad \frac{NP_1}{NQ_1} = \frac{P_1E}{Q_1F} = \frac{MP_1}{MQ_1}.$$

这说明 MN 是三角形 MP_1Q_1 的中线; 由 $ME \parallel BI$、$MF \parallel CI$, 内心的角平分线关系又给出 MI 经过同一中点, 故 M, N, I 共线.

III. 已知整数 $b \geq 2$、实数 $a > 0$ 且 $1/a + 1/b > 1$. 证明 $[a], [2a], [3a], \ldots$ 中有无穷多项是 b 的幂.

解答. 反设从某处起没有 b^m. 取足够大的 m，令 $n = [b^m/a]$，则

$$[na] < b^m < [(n+1)a], \qquad na < b^m < b^{m+1} \leq (n+1)a.$$

由 $ab < a + b$ 得

$$b^{m+1} < bna + a + b.$$

结合 $bna < b^{m+1}$，可得

$$[bna] < b^{m+1} < [(bn+1)a],$$

这与假设矛盾；将 n 换成 $b^r n$ 可在任意大的指数处重复该构造。因此存在无穷多个 m 使 $b^m = [ka]$.

IV. 给定 $n \geq 3$ 的 $n \times n$ 点阵，求用首尾相连的线段覆盖全部点所需的最少段数 k.

解答. 将线段按水平、竖直、其余三类计数为 h, v, d. 若有 $a = n - h$ 行没有水平段、$b = n - v$ 列没有竖直段，则这 $a \times b$ 个交点中，边界上的 $2a + 2b - 4$ 个点只能由斜段覆盖；一条斜段至多覆盖该矩形边界的两个点，故 $d \geq a + b - 2$. 于是

$$k = h + v + d \geq (n - a) + (n - b) + (a + b - 2) = 2n - 2.$$

当水平或竖直段数超过 n 时，删去重复覆盖后仍可降至上述情形，故下界不变。取 $n - 2$ 条互相错开的水平段、$n - 2$ 条互相错开的竖直段，再以两条斜段连接四个端部，可首尾相连并覆盖全部点，达到 $2n - 2$. 因此

$$k_{\min} = 2n - 2.$$

12 yfd-12

一、填空题. 本大题共 8 小题，每小题 8 分.

1. $a,b>0$ 且
$$\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)(a-b)^2=72,$$
求 $\left(1+\frac{1}{ab}\right)(a+b)$ 的最小值.
解答. 记 $x=ab>0, y=a+b$. 由条件
$$y^2=4x+\frac{72x^2}{x^2+1}.$$
令 $T=(1+1/x)y$，则直接化简得
$$T^2-128=\frac{4(x^2-6x+1)^2}{x(x^2+1)}\geq 0.$$
当 $x=3\pm 2\sqrt{2}$ 时等号成立，故最小值为 $8\sqrt{2}$.

2. 设 z 为单位复数，求 $\left|z^3+iz+\frac{1}{z}\right|$ 的值域.
解答. 因 $|z|=1$，有
$$z^3+\frac{1}{z}=z\left(z^2+z^{-2}\right)=2z\,\Re(z^2).$$
故
$$\left|z^3+iz+\frac{1}{z}\right|^2=4\Re(z^2)^2+1\in[1,5],$$
值域为 $[1,\sqrt{5}]$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=3, CA=4, AB=5$，O 为平面上一点，求 $3|OA|+4|OB|+5|OC|$ 的最小值.
解答. 取 $C=(0,0), A=(4,0), B=(0,3)$. 对任意 $O=(x,y)$，分别取单位向量 $(-1,0),(0,-1),(3/5,4/5)$，得到
$$\begin{aligned}3|OA|+4|OB|+5|OC|&\geq -3(x-4)-4(y-3)+5\left(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y\right)\\&=24.\end{aligned}$$
在 $O=C$ 时等号成立，故最小值为 24.

4. $A=\{1,2,3,4,5\}$. M 是 A 的子集构成的集合，M 中任意两个元素的交集都非空，且 $|M|$ 最大. 求满足条件的 M 的个数.
解答. 互补子集成 16 对，每对至多选一个，故 $|M|\leq 16$. 等号时每一对恰选一个，并且必须含全集、排除空集。若选入单点集 $\{i\}$，则所有选入集合都含 i，得到 5 个星形族。
若不选单点集，记选入的二元集族为 $\mathcal{E}$；其余互补的三元集自动选入。此时 $\mathcal{E}$ 必须是两两相交的边族。K_5 中这样的边族数为
$$1+10+30+(20+10)+5=76,$$
分别对应边数 $0,1,2,3,4$（三边时为三角形或三边星形）. 故总数为 $76+5=81$.

5. $1<a<b$，且 $1,a,b$ 不能作三边长，也不能作三条高的长度，求 b 的最小值.
解答. 三数不能作三边等价于 $b\geq a+1$；三数不能作三高等价于倒数不能作三边，即
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 1.$$
因 $a\leq b-1$，左端不小于 $1/(b-1)+1/b$，故
$$\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}\leq 1\quad\Longleftrightarrow\quad b^2-3b+1\geq 0.$$
结合 $b>1$，得 $b\geq(3+\sqrt{5})/2$；取 $a=b-1$ 可达，故最小值为 $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

6. 圆锥底面半径与高均为 1，平面 α 过高的中点且与底面有唯一公共点，将圆锥分成体积 $V_1 < V_2$ 两部分，求 V_1/V_2.

解答. 取底面为 $z=0$、顶点为 $(0,0,1)$，旋转后可令 $\alpha: x+2z=1$；它在底面上与单位圆相切于 $(1,0,0)$，且过 $(0,0,1/2)$. 在高度 z 处，圆锥截面半径为 $1-z$，小部分是圆弓

$$A(z) = (1-z)^2 \arccos\frac{1-2z}{1-z} - (1-2z)\sqrt{(1-z)^2-(1-2z)^2} \quad (0 \le z \le 2/3).$$

积分得

$$V_1 = \int_0^{2/3} A(z)\,dz = \frac{\pi\sqrt{3}}{27}, \qquad V_2 = \frac{\pi}{3} - V_1 = \frac{\pi(9-\sqrt{3})}{27}.$$

所以

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}}{9-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+1}{26}.$$

7. 若恰有三组非零实数对 (a,b) 满足

$$|a+b+1| = |4a-3b+1| = t\sqrt{a^2+b^2},$$

求 t 的所有可能值.

解答. 写 $a = r\cos\theta, b = r\sin\theta$（$r>0$），并分别给两个绝对值取符号 $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. 消去 r 后，对四种符号组合解方向方程

$$3\cos\theta - 4\sin\theta + (\varepsilon - \delta)t = 0,$$

再代回 $r = -1/(\cos\theta + \sin\theta - \varepsilon t)$. 要求恰有三组正的 r，临界情形由平行、重合两类给出

$$t = \frac{5}{2}, \qquad t = \frac{7}{5}, \qquad t = \frac{7\sqrt{19}}{29}.$$

逐一检查正性可知三值均恰产生三组解，故

$$t \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{7\sqrt{19}}{29}\right\}.$$

8. 从 $\{1,\dots,10\}$ 任取四元子集，要求其中任意三个数既不成等差数列也不成等比数列，求概率.

解答. 总数为 $\binom{10}{4} = 210$. 含等差三元组的四集有 112 个，含等比三元组的有 27 个；两者同时含有的四集有 13 个（按公差及公比逐项枚举，等比三元组为 $124, 139, 248, 469$）. 故坏集数

$$112 + 27 - 13 = 126, \qquad P = 1 - \frac{126}{210} = \frac{2}{5}.$$

二、解答题.

9. 求最小正整数 n，使存在非负递增数列 $a_1 \le \cdots \le a_n$、$b_1 \le \cdots \le b_n$，且两列和均至少 $L = 2026^{2026}$，并满足 $\sum_{i=1}^{n} \min(a_i, b_i) \le L^{-1}$.

解答. 交换两列可设 $a_n \le b_n$. 则

$$L^{-1} \ge \sum_i \min(a_i, b_i) \ge a_n \ge \frac{1}{n}\sum_i a_i \ge \frac{L}{n},$$

从而 $n \ge L^2 = 2026^{4052}$. 取 $n = L^2$，令 $a_i = L^{-1}$（全体 i），$b_1 = \cdots = b_{n-1} = 0, b_n = L$，满足全部条件，故最小值为 2026^{4052}.

10. 求所有 $\lambda > 0$，使过 $N(1,3)$ 作两条垂直直线与椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 交于四点且四点共圆.

解答. 设一条直线方向为 $(\cos\theta, \sin\theta)$，另一条为 $(-\sin\theta, \cos\theta)$，以有向参数 t 表示与 N 的距离。代入曲线得两方程

$$(2\cos^2\theta + 1)t^2 + 6(\cos\theta + \sin\theta)t + 12 - \lambda = 0,$$

$$(2\sin^2\theta + 1)t^2 + 6(\cos\theta - \sin\theta)t + 12 - \lambda = 0.$$

四点共圆当且仅当点 N 的两条割线幂相等，即

$$\frac{12-\lambda}{2\cos^2\theta + 1} = \frac{12-\lambda}{2\sin^2\theta + 1}.$$

四点不同时 $\lambda \ne 12$，于是 $\sin^2\theta = \cos^2\theta = 1/2$. 此时第二个方程的判别式为 $8(\lambda - 12)$，故必须且只需 $\lambda > 12$；第一方程判别式同时为 $8(\lambda - 3) > 0$. 解集为 $(12, +\infty)$.

11. 已知 $|a_0| = \cdots = |a_n| = 1$，复数 y, z 是 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 的两个根，证明 $|y| < 4|z|$.
解答. 根不为零。若 $R = |y| \geq 2$，由 $f(y) = 0$ 得

$$R^n = |a_n y^n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} R^k = \frac{R^n - 1}{R - 1} < R^n,$$

矛盾，故 $|y| < 2$. 若 $r = |z| \leq 1/2$，则由常数项

$$1 = |a_0| \leq \sum_{k=1}^{n} r^k \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 1,$$

矛盾，故 $|z| > 1/2$. 于是 $|y| < 2 < 4|z|$.

二试.

I. 设 $x_1 \geq \cdots \geq x_{100} \geq 0$，并要求证明

$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{2} \sum_{i=4}^{100} x_i.$$

解答. 若允许末项为零，结论有反例：取 $x_1 = \cdots = x_9 = 1$、$x_{10} = \cdots = x_{100} = 0$。在通常的修订条件 $x_{100} > 0$ 下，令 $A = x_1 + x_2 + x_3, B = \sum_{i=4}^{100} x_i$，反设 $B \geq 2A$，并令 $x = x_3 > 0$. 则 $B/97 \leq x \leq A/3$，且

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 \leq f(x) := (A - 2x)^2 + 2x^2 + xB.$$

f 为凸函数，最大值在两个端点。$x = A/3$ 时 $f = A(A+B)/3 \leq (A+B)^2/9$；$x = B/97$ 时直接化简（$B/A \geq 2$）得 $f < (A+B)^2/9$. 若前一端点取等号，则还需 $B = 2A$ 且 $x_4 = \cdots = x_{100} = x = A/3$，这又给出 $B = 97A/3 > 2A$，矛盾。因此总有

$$\sum x_i^2 < (A + B)^2/9,$$

与题设矛盾，修订版结论成立.

II. 如图，O, I 分别为三角形 ABC 的外心、内心，E, F 分别为 CA, AB 上的旁切圆切点。过 O 作 EF 的垂线 l，令 $K = AI \cap l$，令 $M = AI \cap \odot(ABC)$（异于 A），证明 $AI = 2KM$.
解答. 记 I' 为 I 关于 O 的对称点。旁切圆切点的垂足关系给出 $I'E \perp AC$、$I'F \perp AB$，所以 A, E, I', F 共圆且 AI' 为直径。结合 $OK \perp EF$ 作角追，得到

$$\angle OKA = \angle KAI'.$$

令 L 为 AI 的中点。由 $\overrightarrow{OL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AI'}$，有 $OL \parallel AI'$，而 A, K, L 共线，故 $\triangle OKL$ 为等腰三角形，$OL = OK$. 在线 AI 上，$OL = OK$ 表明 O 到该直线的投影是 LK 的中点；另一方面 A, M 是外接圆在该直线上的弦端点，故同一投影也是 AM 的中点。因此

$$A + M = L + K \text{ （沿直线}AI \text{ 的有向坐标）},$$

从而 $KM = AL = AI/2$，即 $AI = 2KM$.

III. 在一个 $n \times n$ 表格中，每行每列恰有一家银行。桥是满足相邻格共享边且行号、列号均单调的格子链；若建 T 座桥、总长度为 S，费用为 $S + nT$. 求使费用统一为 $O(n^\alpha)$ 的最小 α.
解答. 银行位置可写为排列 $(i, \pi(i))$. 由单调子序列分割定理，任意长度 n 的排列可分成至多 $2\lceil\sqrt{n}\rceil$ 条单调子列；每条子列连成一座桥，再加一条首列竖桥把各桥接通，故

$$T \leq 2\lceil\sqrt{n}\rceil + 1, \qquad S \leq nT, \qquad S + nT = O(n^{3/2}).$$

反之取 $n = m^2$，将排列按 $m \times m$ 方块交错排列，使任意单调子列至多包含 m 个银行。每座桥至多经过 m 家银行，连通全部银行需 $T \geq m$，故费用至少 $nT \geq m^3 = n^{3/2}$. 因此最小指数为

$$\alpha = \frac{3}{2}.$$

IV. 定义 $\#(x,N)$ 为二进制展开从小数点后第 N 位向前（含整数部分）出现的 1 的个数。若正无理数 y 满足：对任意 $\eta>0$，有无穷多个 N 使 $\#(y,N)<\eta N^{1/d}$（$d>1$ 为整数），证明 y^d 无理.

解答. 乘以适当的 2 的整数次幂不影响结论，设 $1<y<2$. 反设 $y^d=B/A$ 为既约正有理数。令

$$m_N=\lfloor 2^N y\rfloor,\qquad 2^N y=m_N+\theta_N,\quad 0<\theta_N<1.$$

则

$$\delta_N:=B2^{Nd}-Am_N^d=A\big((m_N+\theta_N)^d-m_N^d\big)$$

是正整数，且存在与 A,B,d 无关的常数 C 使 $1\le\delta_N<C2^{N(d-1)}$. 取 N 足够大，令 $K=Nd$，则

$$Am_N^d=B2^K-\delta_N=(B-1)2^K+(2^K-\delta_N).$$

若 $0<\delta<2^K$，二进制借位直接给出

$$\mathrm{wt}(2^K-\delta)\ge K-\lfloor\log_2\delta\rfloor,$$

故 $\mathrm{wt}(Am_N^d)\ge N-O(1)$. 另一方面二进制汉明重量满足

$$\mathrm{wt}(Am_N^d)\le \mathrm{wt}(A)\ \mathrm{wt}(m_N)^d=\mathrm{wt}(A)\,\#(y,N)^d.$$

于是存在常数 $c_0>0$ 使 $\#(y,N)\ge c_0N^{1/d}$ 对所有足够大的 N 成立，这与题设可取任意小的 η 矛盾。因此 $y^d\notin\mathbb{Q}$.