# yfd2026 年数学模拟卷题目汇编

LeyuDame

2026 年 11 月 3 日

# 目录

1 yfd-01 . . . . . 3
2 yfd-02 . . . . . 18
3 yfd-03 . . . . . 33
4 yfd-04 . . . . . 48
5 yfd-05 . . . . . 63
6 yfd-06 . . . . . 78
7 yfd-07 . . . . . 93
8 yfd-08 . . . . . 108
9 yfd-09 . . . . . 123
10 yfd-10 . . . . . 138
11 yfd-11 . . . . . 153
12 yfd-12 . . . . . 168

1. 给定正实数 $a, b$，满足

$$\{2, a+1, b^2\} \subseteq \{2, 3, a, b\}.$$

则 $b =$

2. 已知集合 $U=\{1,2\}$，$A,B,C$ 是 $U$ 的子集，且 $A\cup B\cup C=U$，则 $A\cap B\cap C=\varnothing$ 的概率为

3. 复数列 $\{z_n\}$ 满足：$z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i$，且

$$z_{n+2} = 2z_{n+1} + 3z_n.$$

则 $z_{2026}$ 的值为

4. 函数 $y=\sqrt{10-x}+\sqrt{2x+4}$ 的最大值与最小值之比为

5. 在一个 $4 \times 4$ 的表格中等可能选取三个不同的方格，则这三个方格两两之间没有公共边的概率为

6. 已知四面体 $O-ABC$，$OA=2, OB=3, OC=4$，$\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$N$ 为 $BC$ 的三等分点（靠近 $B$），$M$ 为 $AN$ 的中点，过点 $M$ 的动平面 $\alpha$ 交射线 $OA, OB, OC$ 于 $P, Q, R$. 四面体 $OPQR$ 内切球的半径的最大值为

7. 设抛物线 $C:y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 $F$，准线为 $l:x=-1$，点 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$（$y_2>y_1\geq 0$）在 $C$ 上，直线 $AB$ 与 $l$ 交于点 $M$，且 $A$ 是 $BM$ 的中点．若 $\angle MFB=\frac{2\pi}{3}$，点 $A$ 的坐标为

8. 设点 $A(0,0), B(2026,0), C(t,2026)$（$t \in \mathbb{R}$）. 记 $D$ 为使 $ABCD$ 成平行四边形的第四个顶点. 若 $N(t)$ 表示平行四边形 $ABCD$ 内部（不含边界）的整点（横、纵坐标都是整数的点）的个数，则函数 $N(t)$ 的函数值域中元素个数为

9. **（本题满分 16 分）**在三角形 $ABC$ 中，$D, E$ 在边 $BC$ 上，$AD, AE$ 是 $\angle BAC$ 的三等分线. 若 $DE : BD : CE = 1 : 2 : 3$，求 $\tan B \tan C$.

10. **（本题满分 20 分）**已知椭圆 $C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左右顶点分别为 $A_1,A_2$，过椭圆 $C$ 上一点 $P=(2,\sqrt{3})$ 作两条相互垂直的弦 $PA,PB$，分别以 $PA,PB$ 为直径作圆，其相交于点 $Q$，求 $\triangle QA_1A_2$ 面积的取值范围.

11.（**本题满分 20 分**）可重集

$$V_0 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}.$$

一次变换操作为：从当前多重集中任取三个不同向量 $x, y, z$，删去它们并加入

$$\frac{-x+y+z}{2},\quad \frac{x-y+z}{2},\quad \frac{x+y-z}{2},\quad \frac{x+y+z}{2}.$$

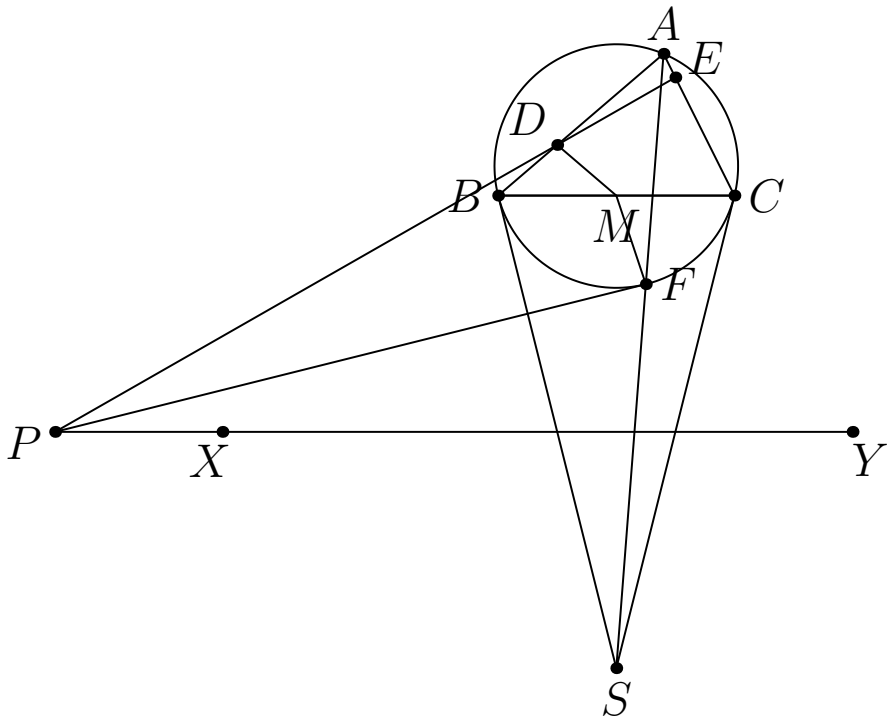
令 $V_n$ 为操作 $n$ 次后的集合，$S_n = \sum_{v\in V_n} |v|v$．证明 $|S_n| < 3\sqrt{5}$.

I. **（本题满分 40 分）**设 $n \geq 3$ 为正整数，$a_1, \ldots, a_n$ 为正实数．黑板上写着乘积

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n.$$

已知将其中任意一个乘号替换为加号都会使表达式的值增加．证明：将所有的乘号都替换为加号也会使表达式的值增加.

II. **（本题满分 40 分）** 如图，$\omega$ 为三角形 $ABC$ 的外接圆，$B,C$ 处的切线交于 $S$，直线 $AS$ 再交 $\omega$ 于 $F$．$M$ 为 $BC$ 的中点，$D\in AB, E\in AC$，满足 $BD=DM, CE=EM$．直线 $ED$ 与 $MF$ 的垂直平分线交于 $P$．过 $P$ 作 $BC$ 的平行线交 $AB, AC$ 于 $X, Y$．证明 $A, X, S, Y$ 四点共圆．（答题时将图画在答题卷上．）



III.（**本题满分 50 分**）求所有整数 $a$，使得存在无穷多个正整数 $n$，满足 $n \mid \varphi(n)! + a$.

IV. **（本题满分 50 分）**给定一个 $25 \times 26$ 的长方形点阵，每个点上各有一枚筹码．可以重复执行以下操作：首先选择任意三个不同的共线点，然后从外侧的两个点中各移动一枚筹码到中间点；只有当外侧两个点都有筹码时才能执行此操作，中间点允许为空．求操作次数的最大值．

1. 设 $p, q \in \mathbb{R}_+$, 且

$$\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q),$$

则 $\dfrac{q}{p} =$_____.

2. 设正整数数列 $\{a_n\}$ 单调递增, 满足

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, \qquad a_6 = 280,$$

则 $a_7 =$_____.

3. 已知直线 $PA, PB$ 分别与半径为 $1$ 的 $\odot O$ 相切于 $A, B,|PO| = 2,$ 且

$$\overrightarrow{PM} = 2\lambda\overrightarrow{PA} + (1-\lambda)\overrightarrow{PB}.$$

若 $M$ 在圆内（不含边界）, 求 $\lambda$ 的取值范围.

4. 在半径为 $R$ 的球内作内接圆柱, 求内接圆柱表面积的最大值.

5. 设 $F$ 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点, 在 $x$ 轴上 $F$ 的右侧取点 $A$. 以 $FA$ 为直径的圆与双曲线左、右两支在 $x$ 轴上方的交点分别为 $M,N$, 求

$$\frac{|FN|-|FM|}{|FA|}.$$

6. 甲、乙、丙三人连续抛掷同一枚硬币, 直到出现“正反反”“正正反”或“反反正”. 三种情形分别由甲、乙、丙获胜. 三人中获胜概率最大者获胜的概率为_____.

7. 已知实数 $a, b, c$ 满足

$$\max_{x\in[-1,1]} |ax^2 + bx + c| = 1,$$

求 $\max_{x\in[-1,1]} |cx^2 + bx + a|$ 的最大可能值.

8. 若一个正整数与其倒序数之和的每一位数字均为奇数, 则称其为小猿数. 求 11 位小猿数的个数.

9. 在三角形 $ABC$ 中,$a, b, c$ 分别为 $A, B, C$ 的对边, 满足

$$(\sin B + \sin C)^2 = \sin^2(B + C) + 3 \sin B \sin C, \qquad a = \sqrt{6}.$$

求周长最大值.

10. 抛物线 $y^2 = 4x$ 的弦 $AB$ 过焦点 $F(1,0)$, 三角形 $AOB$ 的外接圆再交抛物线于 $P \neq O, A, B$. 若 $PF$ 平分 $\angle APB$, 求 $|PF|$ 的所有可能值.

11. 已给定 $n \in \mathbb{Z}_+$, 令

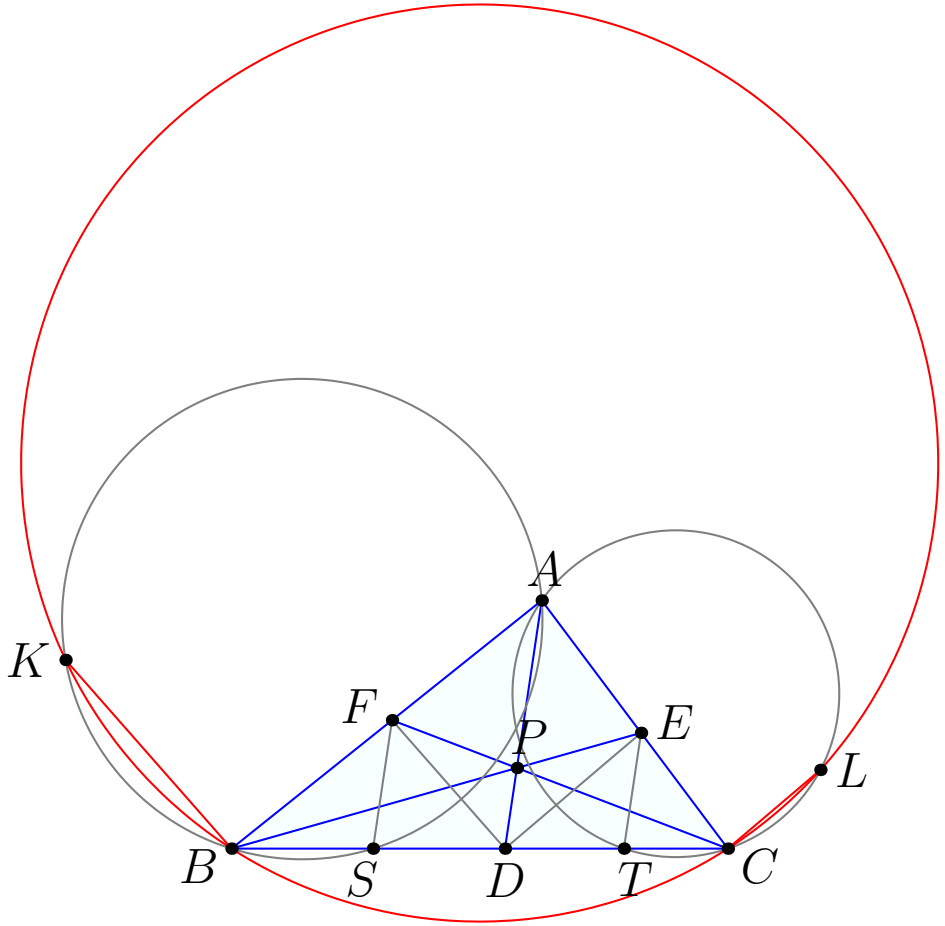
$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z-k|} \geq 1 \right\},$$

其面积为 $A$. 证明 $A \geq \dfrac{\pi}{12}(11n^2+1)$.

一、 给定 $a_0 = 0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, 证明

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i(a_i - a_{i-1})| \leq \frac{n+1}{2} \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})^2.$$

二、 设 $P$ 为 $\triangle ABC$ 内部一点,$AP, BP, CP$ 分别交对边于 $D, E, F$; $S, T \in BC$ 且 $AD, FS, ET$ 两两平行.$K, L$ 分别在 $\triangle ABS, \triangle ACT$ 的外接圆上, 且 $BK \parallel DF, CL \parallel DE$. 证明 $K, B, C, L$ 四点共圆.



三、 求全体有序正整数对 $(A, B)$, 使

$$a_0 = A, \qquad a_{n+1} = (n + B) \bmod (a_0 + \cdots + a_n)$$

定义的数列有界.

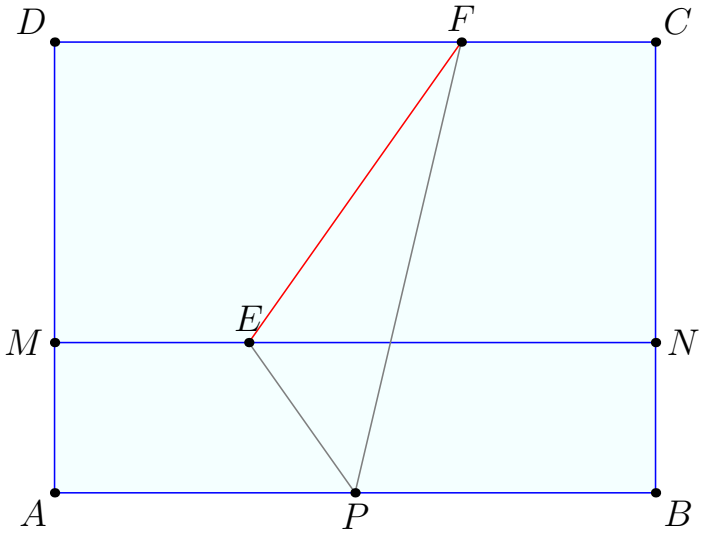
四、 $S$ 为 20 元集合,$A_1, \ldots, A_{2k+1}$ 为互不相同的 7 元子集, 每个 $A_i$ 恰与 $k$ 个其他子集交集非空, 求 $k$ 的最大值.

1. 在公比为 2 的等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_2, a_3, a_4 - 4$ 成等差数列, 求 $a_5$.

2. 袋中有编号 $1, 2, \ldots, 10$ 的球, 随机取三球, 恰有一个编号为另一个编号两倍的概率.

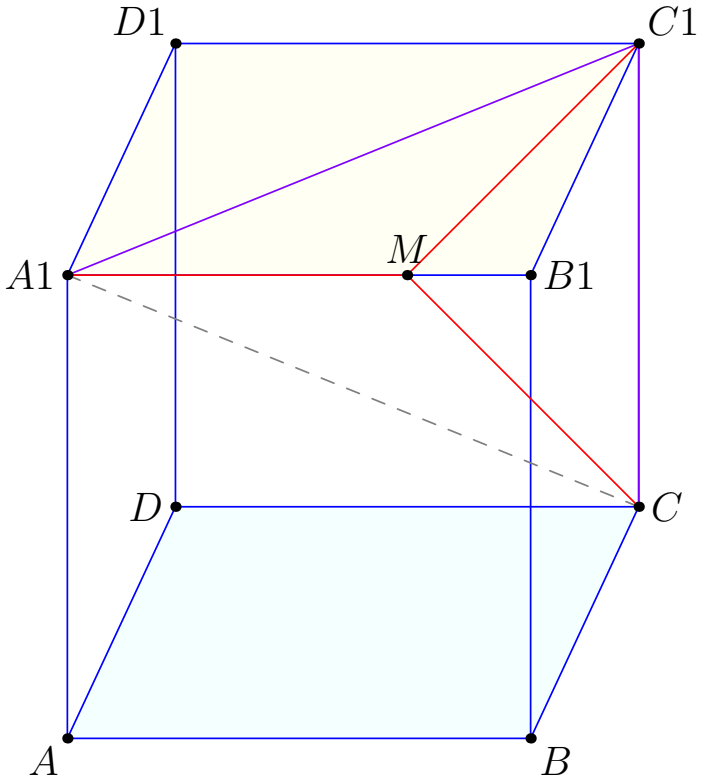
3. 正实数 $x, y$ 满足 $\log_a \sqrt{x} = \log_b \sqrt{x+y} = \log_{ab} y$, 求 $x/y$.

4. 在矩形 $ABCD$ 中,$AB=4, AD=3$, $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $MN \parallel AB$. 若 $E \in MN, F \in CD$ 且 $|EF|=\sqrt{6}$, 求 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最小值.



5. 过抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点的动直线交抛物线于 $A, B$, $Q$ 为 $AB$ 中点, $P$ 为抛物线上任意点. 若 $|PF| + |PQ|$ 的最小值为 $6$, 求 $p$.

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AB=CC_1=\sqrt{2}, BC=1$, $M\in CDD_1C_1$ 且 $C_1M\perp$ 平面 $A_1CM$, 求三棱锥 $M-A_1CC_1$ 外接球表面积.



7. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x-1$, 在 $[t,t+3]$ 上最大、最小值为 $M(t),m(t)$, $g(t)=M(t)-m(t)$. 求 $g$ 在 $[-3,-1]$ 上最小值.

8. 用红、黄、蓝三色给正八面体八个面染色, 至少用两种颜色, 旋转后相同视为同一种, 求不同彩色正八面体个数.

9. 在三角形 $ABC$ 中,$2ac\sin A + a^2 + c^2 - b^2 = 0$. 求

$$\frac{4\sin^2 C + 3\sin^2 A + 2}{\sin^2 B}$$

的最小值及此时 $B$.

10. 对非零复数有限集 $A=\{z_1,\ldots,z_n\}$ $(n\geq 3)$ 定义 $B(A)=\{z_iz_j : i<j\}$, 求所有满足 $A=B(A)$ 的集合.

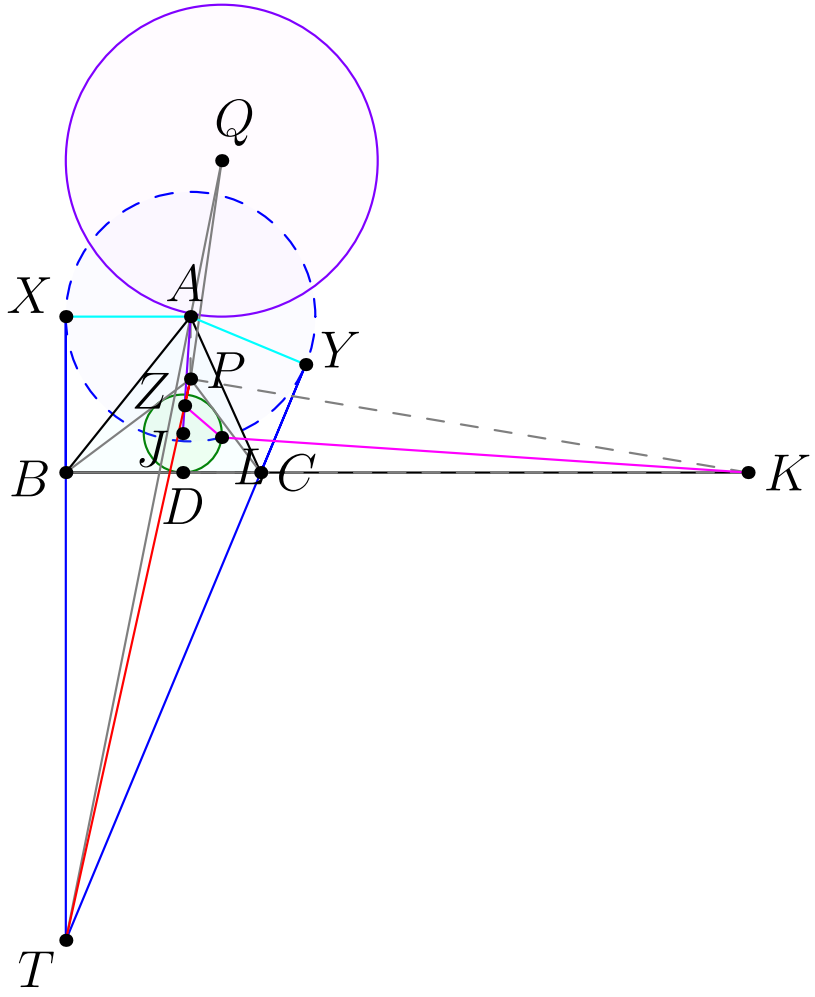
11. 直线 $l$ 与椭圆 $x^2/2+y^2=1$ 交于 $A,B,$ $O$ 为原点. 若 $l$ 使 $\triangle AOB$ 面积最大, 取 $l_1 \parallel l_2, l_3 \parallel l_4$ 且对应斜率和为 $0,$ 求四线围成四边形面积范围.

一、 给定 2026 个实数 $a_i$ 满足 $\sum a_i^2 = 1$ (循环下标), 求最大的 $u$ 使

$$\sum a_i a_{i+2} - 2\left(\sum a_i a_{i+1}\right)^2 \geq u.$$

二、 给定正整数 $m < n$, 有 $n$ 堆物品, 每堆 $m$ 个; 每次从两堆共移除 $n$ 个, 求可全部移除的 $(m, n)$.

三、 在锐角三角形 $ABC$ 中, 点 $P$ 满足 $AP \perp BC$; $\omega$ 为 $\triangle PBC$ 的内切圆, 圆心为 $J$, 与 $BC$ 切于 $D$; $K \in BC$ 且 $KP = KD$. 点 $X, Y, L, Z$ 按题面构造, 证明 $PZ, BX, CY$ 三线共点.



四、 证明存在无穷多个正整数 $m$, 使恰有唯一正整数 $n$ 满足 $\sigma(n) = m$.

1. 已知 $A, B$ 是球 $O$ 的球面上两点,$\angle AOB = 90°$,$C$ 为球面上的动点. 若三棱锥 $O - ABC$ 体积的最大值为 $4/3$, 求球 $O$ 的半径.

2. 已知 $\sqrt{\log_b n} = \log_b \sqrt{n}$ 且 $b \log_b n = \log_b(bn)$, 求 $b$.

3. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 2$, 且对任意不相等正整数 $m, n$, 均存在 $k \in \mathbb{N}^*$ 使 $a_m + a_n = a_k$, 求 $a_1 + \cdots + a_5$ 的最小值.

4. 三角形 $ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c,$ 满足

$$\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B},$$

求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小可能值.

5. 实数 $x_1, x_2, y_1, y_2$ 满足 $x_1^2 + y_1^2 = 4, x_2^2 + y_2^2 = 9, x_1x_2 + y_1y_2 = 0$, 求

$$|x_1 + y_1 - 4| + |x_2 + y_2 - 9|$$

的最大值.

6. 平面向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$, $2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2=0$, 求 $|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}|$ 的最大值.

7. $A = \{x_1, \ldots, x_5\}$ 为五元集合,$(a_1, \ldots, a_6)$ 从 $A$ 独立等概率抽取,$f$ 为 $A$ 上的随机排列. 求 $a_{i+1} \neq f(a_i)$ $(a_7 = a_1$ 对所有 $i)$ 的概率.

8. 非空 $S \subseteq \{-10, -9, \ldots, 10\}$ 满足 $|S| + \min(S)\max(S) = 0$, 求不同集合 $S$ 的个数.

9. 正实数递增数列 $\{a_n\}$ 满足

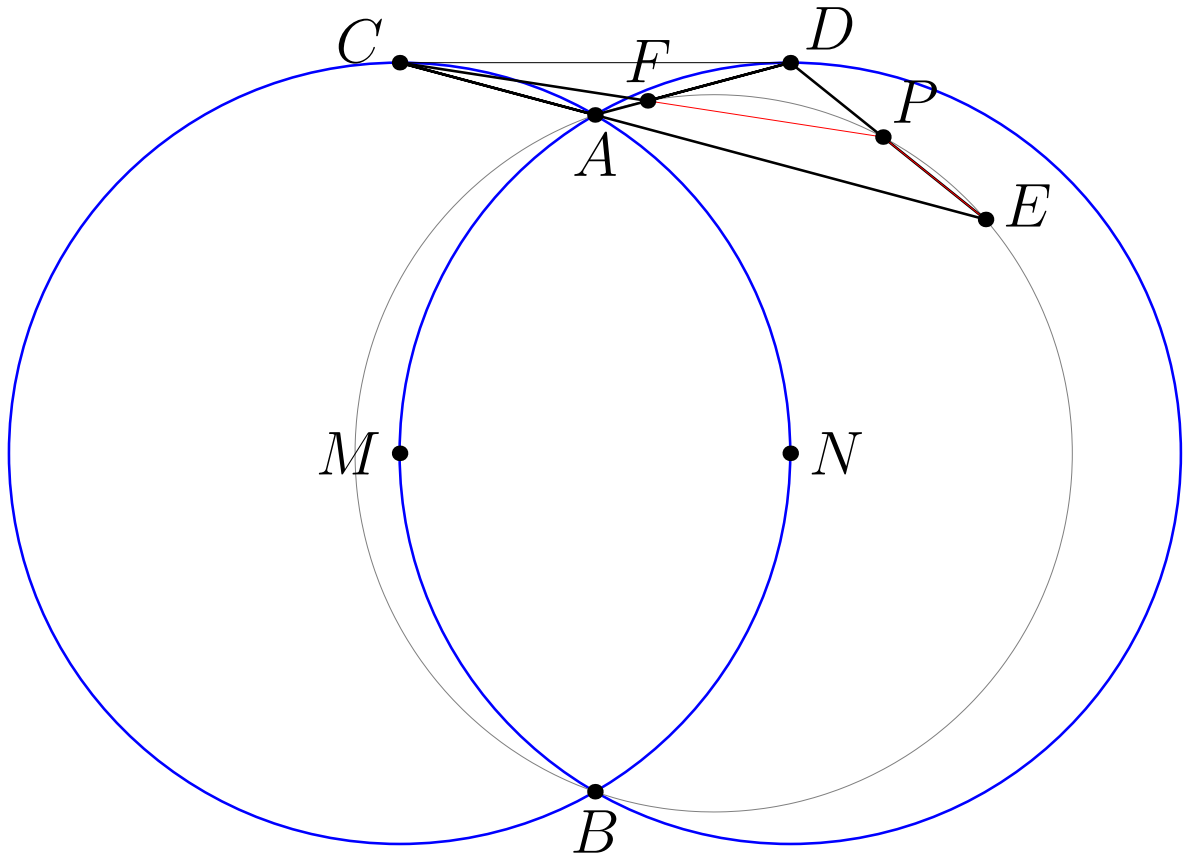
$$\prod_{i=1}^{k}(a_i + a_{i+1}) \le (2^k + 2026)\prod_{i=1}^{k} a_i, \qquad a_{k+1} = a_1,$$

对所有 $k \ge 3$, 证明任意两项相等.

10. 过抛物线 $y = x^2$ 上的 $A(1,1)$ 作切线, 交坐标轴于 $D, B$. 点 $C$ 在抛物线上,$E \in AC, F \in BC$ 满足 $AE/EC = \lambda_1, BF/FC = \lambda_2$, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 直线 $CD$ 与 $EF$ 交于 $P$, 求 $P$ 的轨迹.

11. 非零复数 $a, b, c$ 满足 $|a| = |b| = |c|$ 且 $a^3 + b^3 + c^3 = rabc$, 其中 $r \in \mathbb{R}, r \neq 3$. 问三个二次方程中有几个存在模长为 $1$ 的根.

一、 如图所示,$\odot M$ 与 $\odot N$ 相交于 $A, B$, 外公切线 $CD$ 分别切于 $C, D$; $AC, AD$ 分别与过 $A, B$ 的圆 $\odot O$ 交于 $E, F$ $(E, F \neq A)$. 若 $P = CF \cap DE$, 证明 $P \in \odot O$.



二、 已知非负实数 $a_1, \ldots, a_{2026}$ 满足 $\sum a_i = 1$, 求有序数对 $(i, j)$ 的最大可能值, 使

$$\frac{a_i^2}{4} + a_j \geq \frac{1}{2025}.$$

三、 任意给出集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的 $2n-1$ 个二元子集, 证明总可从中选出 $n$ 个二元子集, 使其并集的元素个数不超过 $\frac{2}{3}n+1$.

四、 已知 $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ 为 $1, 2, \ldots, 2026$ 的一个排列, 且对任意正整数 $m, n$, 若 $|m-n| > 20^{26}$, 则

$$\sum_{i=1}^{2026}(m+i, n+a_i) < 2|m-n|,$$

求所有满足要求的数列.

1. 设集合 $S=\{1,2,\ldots,10\}$. 求满足

$$A\cap\{1,2,3\}\neq\varnothing,\qquad A\cup\{4,5,6\}\neq S$$

的子集 $A$ 的个数.

2. 设 $a, b, c, d > 0$， $ac = 100, bd = 101$. 求

$$M = a^{\log_{10} b} b^{\log_{10} c} c^{\log_{10} d} d^{\log_{10} a}.$$

3. 一条直线与函数 $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ 的图象交于三个不同的点，其中两个点的横坐标为 $6, 7$. 求第三个横坐标.

4. 随机投掷四颗骰子，求至少有两颗骰子点数之和为 9 的概率.

5. 正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长为 $5$，侧棱两两的夹角彼此相等且固定，顶点到底面的高度为 $4$．在 $PA$ 上取 $D$ 使 $PD=4$，求点 $P$ 到平面 $BCD$ 的距离.

6. 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ 的焦点为 $F_1,F_2$. 点 $P$ 在第一象限，三角形 $PF_1F_2$ 的重心为 $G$、内心为 $I$，且 $IG\parallel F_1F_2$. 求 $P$.

7. 求方程

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \cos^2(kx) = n$$

在 $[0, 2\pi)$ 内的解数.

8. 正十棱柱的顶点为 $A_1, \ldots, A_{10}, B_1, \ldots, B_{10}$. 不经过顶点的平面把这些顶点分成两部分，求其中一部分 $M$ 的可能个数.

9. 已知锐角三角形 $ABC$ 满足

$$\frac{a\sin A + c\sin C - b\sin B}{a\sin B\sin C} = 2\sqrt{3},$$

并在 $AC$ 的另一侧作 $\triangle ACD$，其中 $AD = 3$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = -3$，$[ACD] = 3\sqrt{3}/2$. 求 $[ABC]$ 的取值范围.

10. 已知 $p, q > 0$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ 且

$$|a_{m+n} - a_m - a_n| \leq \frac{1}{pm + qn} \qquad (m, n \in \mathbb{N}^*).$$

求 $a_n$.

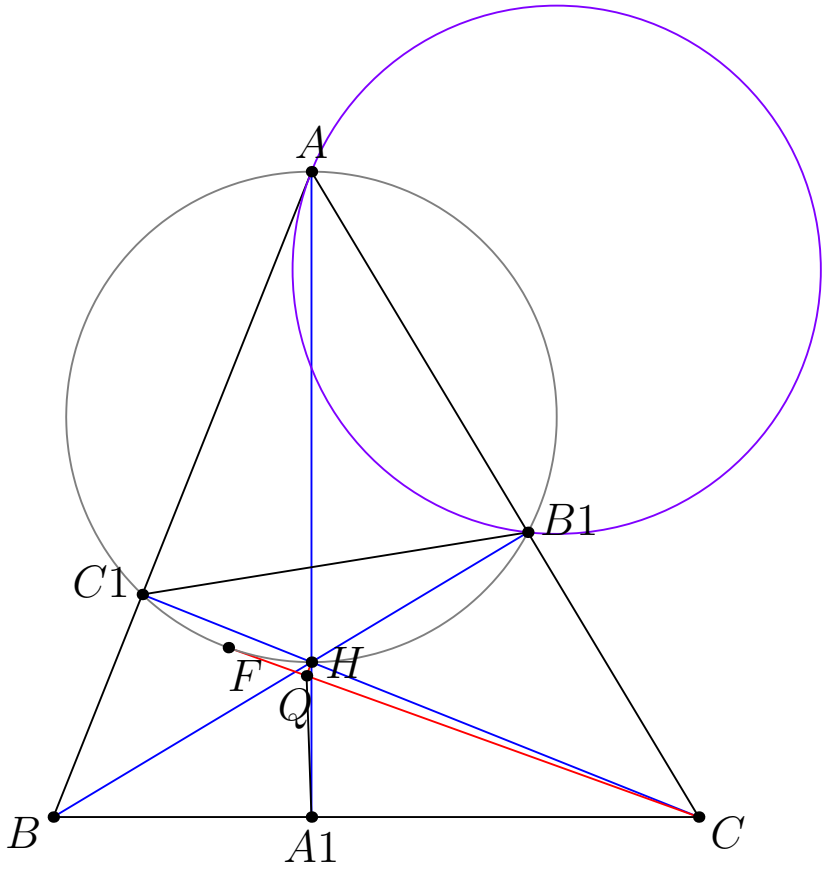
11. 抛物线 $y^2 = 2px$（$p > 0$）的三条切线构成三角形 $ABC$. 证明其外接圆过定点并求该点.

一、 给定整数 $n \geq 3$，整数列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 满足 $1 \leq a_k \leq n$，且对每个 $1 \leq k \leq n-1$，

$$\left| \frac{a_1 + \cdots + a_{k+1}}{k+1} - \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} \right|$$

都取到非零的最小值．求这样的数列个数．

二、 $AA_1, BB_1, CC_1$ 是锐角三角形 $ABC$ 的高，$H$ 是三角形 $ABC$ 的垂心．过 $C$ 作三角形 $AB_1C_1$ 的外接圆的切线 $CF$，$F$ 在三角形 $ABC$ 的内部，$H$ 在 $CF$ 上的投影为 $Q$．圆 $D$ 过 $A, B_1$ 并与 $AB$ 相切．证明：$A_1Q$ 是圆 $D$ 的切线.



三、 设 $a$ 是正分数. 证明：$a$ 是真分数，当且仅当存在两两不同且大于 $1$ 的正整数 $q_1, \ldots, q_s$，使

$$a = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \cdots + \frac{1}{q_s}, \qquad q_i \mid q_{i+1}\ (1 \le i < s).$$

四、 小猿城的街道都是东西向和南北向, 选定 $n$ 个十字路口设置保安亭 (任意两个保安亭不在同一街道上). 以两个保安亭为对角顶点的轴对齐矩形内保安亭数称为安全强度. 求安全强度最大值的最小可能值.

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数且 $a_4a_7=9$，求

$$\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}.$$

2. 设

$$A=\{(x,y):x^2-3xy+4y^2=\tfrac{7}{2}\},\qquad B=\{(x,y):kx+y=2\}\ (k>0).$$

当 $A\cap B$ 只有一个元素时，求 $k$.

3. 已知函数 $f(x)=\cos(a\sin x)-\sin(b\cos x)$ 无零点，求 $a^2+b^2$ 的取值范围.

4. 从正十二边形的顶点中取出四个顶点，求它们两两不相邻的概率.

5. 定义在实数域上的函数 $f$ 满足

$$f\left(\frac{1-4x}{4-x}\right)=4-xf(x)\qquad(x\neq 4).$$

已知存在两个互不相同的实数 $a,b\neq 4$ 使 $f(a)=f(b)=5/2$，求 $a+b$.

6. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$M,N$ 分别为 $BB_1,A_1C_1$ 的中点．过 $A,M,N$ 的平面将棱柱分成体积 $V_1<V_2$ 的两部分，求 $V_1/V_2$.

7. 圆 $C_1 : x^2 + (y-4)^2 = 16/5$、抛物线 $C_2 : y^2 = 4x$ 与动直线 $l : y = k(x+4)$ 将平面分成五个部分，求 $k$ 的取值范围.

8. 将 $1,\ldots,9$ 填入 $3\times 3$ 方格，计算所有相邻格两数之差绝对值之和．求使该和最大的填法数．

9. 设 $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n^2-2a_n+2}+b$.

(1) 若 $b=1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b=-1$，问是否存在实数 $c$ 使 $a_{2n}<c<a_{2n+1}$ 对所有 $n\geq 1$ 成立?

10. 在椭圆 $C:x^2/a^2+y^2/b^2=1$（$a>b>0$）中，$F_1,F_2$ 为左右焦点．$P$ 为非长轴顶点，$Q\in F_1F_2$，且三角形 $PQF_1,PQF_2$ 的内切圆半径相等．证明 $|PQ|=b$.

11. 已知 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ 且

$$\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_3} + z_3\overline{z_1}) = -1.$$

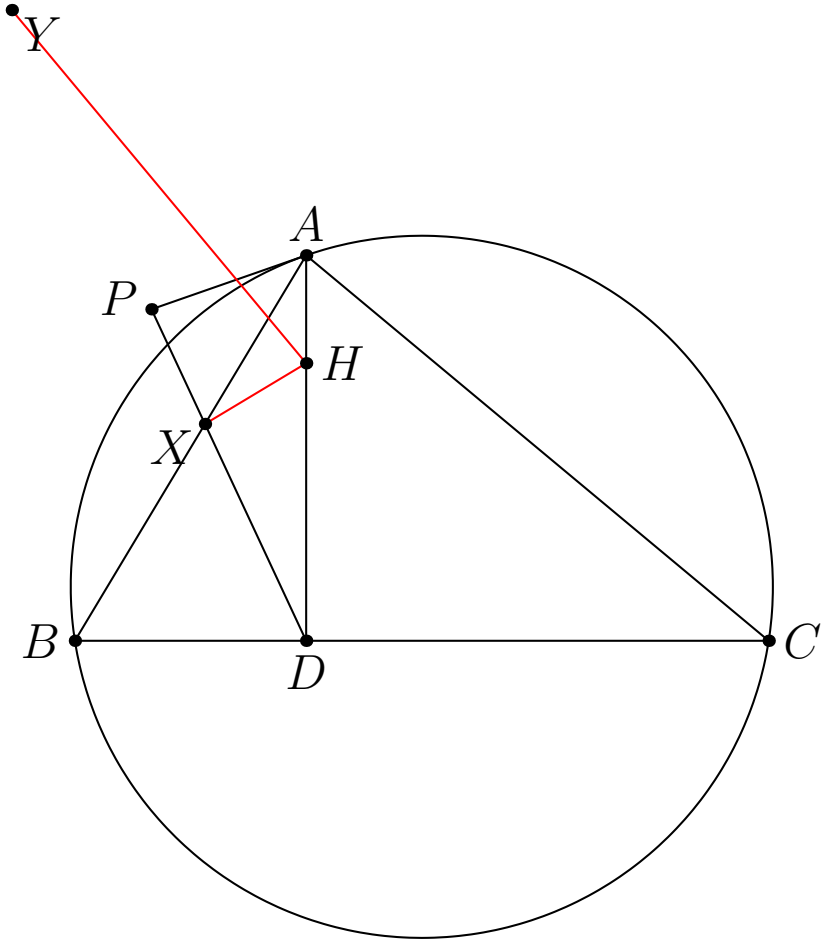
求 $|(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|$ 的最大值.

一、 给定 $0 \leq x_1, \ldots, x_{1001} \leq 1$，求

$$F = \sum_{i=1}^{1001} x_i - \sum_{i=1}^{1001} x_i x_{i+1} - \sum_{i=1}^{1001} x_i x_{i+2}, \qquad x_{1002} = x_1,\ x_{1003} = x_2$$

的最大值.

二、 在三角形 $ABC$ 中, 垂心为 $H$, $D$ 为 $BC$ 上高线的垂足. 点 $P$ 满足 $AP = HP$ 且 $AP$ 与三角形 $ABC$ 的外接圆相切. 直线 $PD$ 与 $AB, AC$ 分别交于 $X, Y$. 证明 $\angle YHX = \angle BAC$ 或 $\angle YHX + \angle BAC = 180°$.



三、 对正整数 $N>1$，按题面记 $q_1 \le \cdots \le q_t$，并令 $A_1 = q_1$、$A_{j+1} = q_{j+1} - 1/A_j$. 求满足

$$A_t = \frac{p_1\alpha_1 + \cdots + p_k\alpha_k}{t}$$

的全部 $N$.

四、 对正整数 $n$ 定义 $R_n$ 如题面. 若任意 $n$-小猿图一定是 $m$-大猿图，求 $m$ 的最小值.

1. 平面上的点集

$$M=\left\{(x,y):\log_2(x^2-x+2)=\sin y-\sqrt{3}\cos y,\ \frac{\pi}{2}\le y\le\pi\right\}$$

向 $x$ 轴投影，求所得图形的长度.

2. 已知 $a_1 = 1$ 且 $a_n + 1 < a_{n+1} < 2a_n + 2$. 设 $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. 若 $S_m = 2026$, 求正整数 $m$ 的可能值个数.

3. 设 $a \geq b \geq c > 0$ 且 $a+b+c = abc$, 求 $bc$ 的最大值.

4. 空间向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 两两夹角均为 $60^\circ$，且 $|\mathbf{a}|=1,|\mathbf{b}|=2,|\mathbf{c}|=4$. 若

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{a})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{b},\qquad \mathbf{v}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{a})=\mathbf{v}\cdot\mathbf{c},$$

求 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$ 的最大值.

5. 在 $3\times3$ 方格中填入非负整数，使每行、每列的和均为 $9$，求填法数.

6. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AD\perp$ 平面 $BCD$，$\angle ABD+\angle CBD=\pi/2$，且 $BD=BC=2$. 求外接球表面积的最小值.

7. 在锐角三角形 $ABC$ 中，边 $a,b,c$ 分别对角 $A,B,C$，满足

$$\frac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\frac{2\sin B-\sin C}{\sin C},\qquad a=4.$$

求 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ 的取值范围.

8. 每次从 $1,2,3,4$ 中等概率写一个数；若最后两个数之和为质数则停止．求停止时最后一个数为 $1$ 的概率．

9. 求最小实数 $y$，使存在正整数 $x$ 及实数 $x_1, \ldots, x_{2026}$，令 $z = x + iy, z_k = x_k + i$，满足 $z^2 = \sum_{k=1}^{2026} z_k^2$.

10. 椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$（$a>b>0$）的上顶点为 $A$，直线 $y=x-3$ 交椭圆于 $P,Q$．若 $\triangle APQ$ 的重心为椭圆右焦点，求右焦点坐标.

11. 设 $\{a_1, \ldots, a_{50}, b_1, \ldots, b_{50}\}$ 为 100 个互异实数，令

$$f(x) = \sum_{i=1}^{50} |x - a_i| - \sum_{i=1}^{50} |x - b_i|.$$

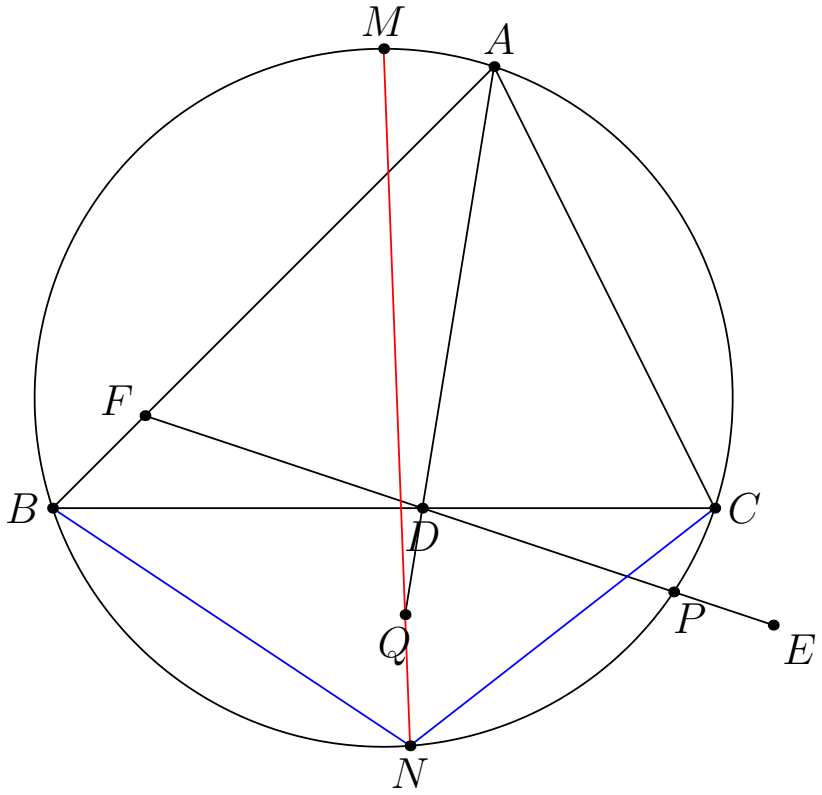
求在零点有限的前提下，零点数的最大值.

一、 给定整数 $n \geq 2$，非负实数 $a_1, \ldots, a_n$ 满足 $\sum a_i = 1$，求

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + a_{i+1}) \min\{a_i, a_{i+1}\}, \qquad a_{n+1} = a_1,$$

的最大值.

二、 在 $\triangle ABC$ 中，$\Omega$ 为外接圆，$AD$ 为角平分线．$E,F$ 分别是 $B,C$ 关于 $AD$ 的对称点，$EF$ 交 $\Omega$ 于 $P$．延长 $AD$ 至 $Q$ 使 $AQ=AP$．$M$ 为弧 $BAC$ 的中点，$MQ$ 交 $\Omega$ 于另一点 $N$．证明 $Q$ 是 $\triangle BNC$ 的内心．



三、 $1\times1$ 瓷砖铺设 $2026\times2026$ 方格，每块箭头指向上、左、右或下．旋转若干瓷砖，使任意起点沿箭头行走都经过某个固定单元格后离开网格．求为保证总能做到所需的最少旋转数．

四、 是否存在 $t > 10, C > 10$ 及正整数列 $\{a_n\}$，满足

$$a_{n+3} = a_{n+2} + \gcd(a_{n+1}, a_n) - 1, \qquad C \le a_n \le n^t \quad (n \ge 1)?$$

1. 给定正实数 $x, y$ 满足

$$\log_2[\log_3(\log_5 x)] = \log_5[\log_3(\log_2 y)] = 0,$$

则 $x + y =$

2. 已知集合 $A=[-1,2]$，$B=\{x \mid mx+1=0\}$，若 $A \cup B=A$，则 $m$ 的取值范围为

3. 在直角三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle B = 90^\circ$，角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$，$b = 1$，且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < \frac{1}{2}$，那么 $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ 的取值范围是

4. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}AD=4$，$E,F,G,H$ 分别为 $AB,BC,CD,AD$ 的中点.

现将 $\triangle AEH,\triangle BEF,\triangle CFG,\triangle DGH$ 分别沿 $EH,EF,FG,GH$ 把这个矩形折成一个空间图形，使 $A$ 与 $D$ 重合，$B$ 与 $C$ 重合，重合后的点分别记为 $M,N$，则多面体 $MNEFGH$ 的体积为

5. 在椭圆 $C$ 中，$A, B$ 分别为长轴、短轴的一个端点，$F$ 为一个焦点．过 $A$ 作直线 $FB$ 的平行线 $l$，$l$ 与 $C$、短轴所在直线分别交于点 $M, N$．若 $M$ 为线段 $AN$ 的三等分点，则椭圆的离心率为

6. 一个 $2 \times 3$ 的方格表中有六个格子，相邻两个格子（指有公共边）中心之间有 $\frac{1}{2}$ 的概率连一条线，则存在一条折线从左上角的格子中心连到右下角的格子中心的概率为

7. 给定一个各项为正整数的等差数列 $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ $(n \geq 2)$，使得存在该数列的一个排列 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$，满足

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) \cdots (x_n + 2) = x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n} + 7,$$

则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n} =$

8. 毛毛、吉吉和杨杨三人瓜分 20 枚硬币，并将分到的硬币放入两只手中（一只手可以不放）．若操作结束后，三个人中任意两人都可以各出一只手使得两只手中硬币总数为 10，则不同的放硬币方案种数为（左右手是不同的手）

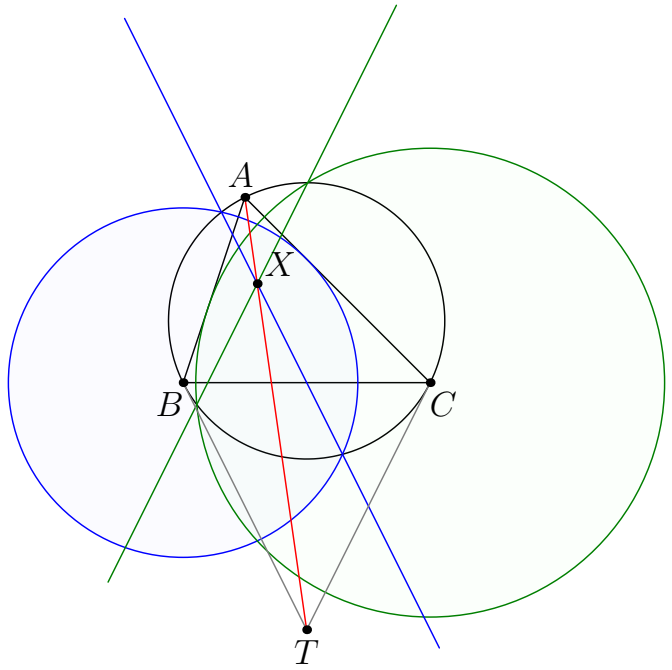
9.（**本题满分 16 分**）已知函数 $y=f(x)$ 的图像是自原点出发的一条折线，当 $n \le y \le n+1$ 时（$n$ 为自然数），图像为斜率是 $b^n$ 的线段（$b>0$ 且 $b \ne 1$）．证明：$y=f(x)$ 与 $y=x$ 没有横坐标大于 $1$ 的交点.

10. **（本题满分 20 分）**给定抛物线 $C:y^2=8x$，定点 $A(2,4)$．试问在坐标系中是否存在点 $T$：过点 $T$ 的任意直线 $l$ 与抛物线 $C$ 交于 $B,C$ 两点，只要 $A,B,C$ 三点不共线，都能使 $\triangle ABC$ 成为以 $\angle BAC$ 为直角的三角形？若存在，求出所有满足条件的点 $T$；若不存在，说明理由．

11.（**本题满分 20 分**）给定复数 $z, w$ 满足 $|z| \leq 1$ 且 $|w| \leq 1$，$\arg(z)$ 表示复数 $z$ 的幅角主值，证明

$$|z-w|^2 \leq (|z|-|w|)^2 + (\arg z - \arg w)^2.$$

1. 设锐角三角形 $ABC$ 的外接圆为 $\Omega$. 以 $B$ 为圆心且与直线 $AC$ 相切的圆记为 $\Omega_B$；以 $C$ 为圆心且与直线 $AB$ 相切的圆记为 $\Omega_C$. 设 $\ell_B$ 为圆 $\Omega_B$ 与 $\Omega$ 的公共弦，$\ell_C$ 为圆 $\Omega_C$ 与 $\Omega$ 的公共弦. 圆 $\Omega$ 在点 $B, C$ 处的切线交于点 $T$. 证明：直线 $AT, \ell_B, \ell_C$ 三线共点.



2. 给定正实数 $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ $(n \geq 2)$，使得对任意 $k$ 均有

$$\frac{a_k^2+1}{b_k} \geq \sum_{i=1}^{n} b_i, \qquad \frac{b_k^2+1}{a_k} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

证明 $\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| < \sqrt{2n}$.

3. 吉吉王国有 $2^n$ 座城市，编号为 $0, 1, \ldots, 2^n - 1$；二进制表示恰有一位不同的两城相邻．每对相邻城市之间有两个方向相反的单向道路，每条道路等级属于 $\{1, \ldots, n\}$．每座城市出发道路等级互不相同，进入道路等级全相同．求所有可能的 $n$．

4. 如果一个分数 $x$ 在某个 $b$ 进制下能写成有限小数（$2 \le b \le 2026$），则称 $x$ 为小整数. 证明：存在有限个正整数 $n \ge 4$，使得对区间 $(2n/3, n)$ 内每一个整数 $m$，在 $m/(n-m)$ 与 $(n-m)/m$ 中至少有一个小整数.

1. 已知实数 $a, b, c$ 均大于 $1$ 且 $a^{\log_b c} b^{\log_c a} = 100$，则 $a$ 的最大可能值为

2. 已知 $z, w$ 均为复数，$|z| = |w| = 1$，$zw + \overline{zw} = 1$，则 $z + w$ 的实部的最大可能值为

3. 已知 $F_1, F_2$ 分别是双曲线 $x^2 - y^2/b^2 = 1$ 的左、右焦点, 双曲线上的一点 $A$ 位于第一象限内, 若 $AF_2 = 2$ 且 $\angle F_1AF_2 = 45°$，延长 $AF_2$ 交双曲线右支于点 $B$，则 $\triangle F_1AB$ 的面积为

4. 在边长为 8 的正方形 $ABCD$ 中，$M$ 是 $BC$ 边的中点，$N$ 是 $AD$ 边上点，且 $DN = 3NA$. 若常数 $m$ 满足在正方形 $ABCD$ 的边上恰有 6 个不同的点 $P$，使 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = m$，则实数 $m$ 的取值范围是

5. 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 16，$E$ 是棱 $BC$ 的中点，$P$ 是侧棱 $AA_1$ 上的动点，直线 $C_1P$ 交平面 $EB_1D_1$ 于点 $Q$，则动点 $Q$ 的轨迹长度的最小可能值为

6. 对任意实数 $a \in [0,1]$，实数 $x, y$ 分别为区间 $[0,a]$ 及 $[0,1]$ 中随机选取的实数，记 $P(a)$ 为 $\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) > 1$ 的概率，则 $P(a)$ 的最大可能值为

7. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_0 = 0,\ |x_{n+1}| = |x_n + 1|$，则 $|x_1 + x_2 + \cdots + x_{125}|$ 的最小值为

8. 已知映射 $f:\{0,1,2,3,4,5,6\}\to\mathbb{Z}$ 满足 $f(0)=0, f(6)=12$，且对任意 $x,y$ 均有

$$|x-y|\le|f(x)-f(y)|\le 3|x-y|,$$

则符合要求的映射的个数为

9.（**本题满分 16 分**）在 $\triangle ABC$ 中，内角 $A, B, C$ 所对的边分别为 $a, b, c$，且

$$\frac{\cos A}{\cos C} = \frac{a}{2b - c}.$$

点 $D$ 在边 $BC$ 上，且满足 $DC = 2BD$，求 $AD/BD$ 的最大可能值.

10. **（本题满分 20 分）**给定正实数 $a, b$，设点 $P$ 是双曲线 $\Gamma : x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 上的任意一点. 过点 $P$ 的直线与 $\Gamma$ 的两条渐近线 $l_1 : y = \frac{b}{a}x$ 及 $l_2 : y = -\frac{b}{a}x$ 分别交于点 $P_1, P_2$，设 $\lambda = PP_1/PP_2$，求 $S_{\triangle OP_1P_2}$ 的值.

11. **（本题满分 20 分）**已知数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 $n$，均有

$$a_{n+1} = a_n - \frac{\sin a_n}{n+1},$$

若 $0 < a_1 < \sqrt{3}$，证明对任意正整数 $k$，有 $ka_k < \dfrac{3a_1}{3 - a_1^2}$.

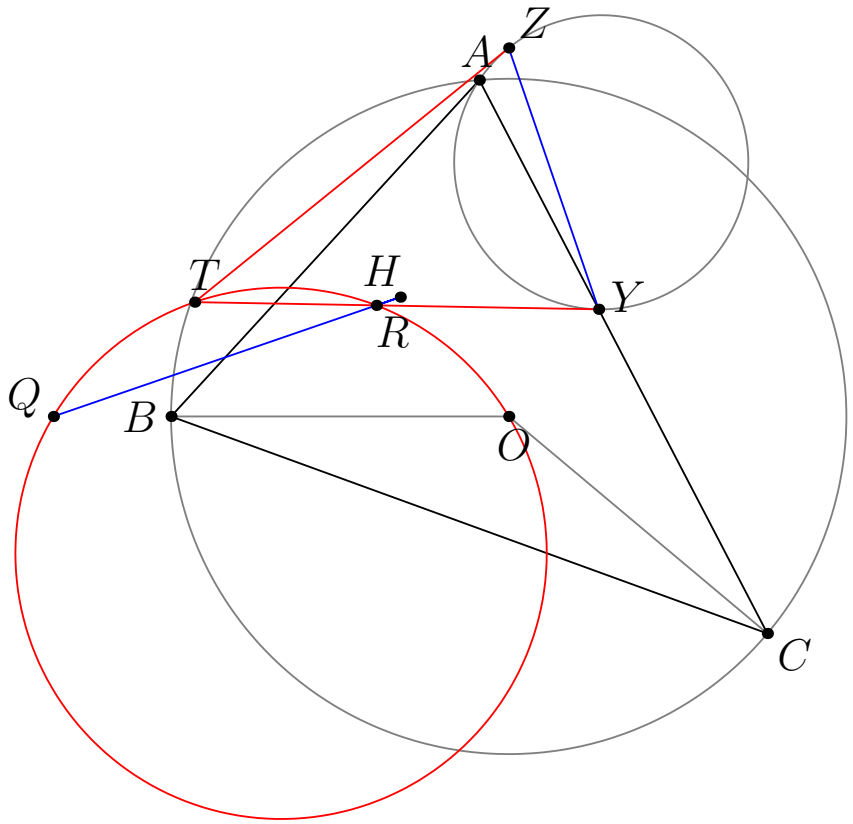
1.（**本题满分 40 分**）已知无穷项实数列 $a_1, a_2, \ldots$ 满足 $a_1 = 1$，且对任意 $n > 1$，

$$\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i < 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)^2 a_i > 0.$$

证明

$$2026^3 a_1 + 2025^3 a_2 + \cdots + a_{2026} < 12345.$$

2. **（本题满分 40 分）**设锐角三角形 $ABC$ 满足 $AB<AC$，其外心、垂心分别为 $O,H$．点 $Z,Y$ 分别位于 $AB,AC$ 上，且 $\angle ZOB=\angle YOC=90^\circ$．过 $H$ 作直线 $YZ$ 的垂线，分别交直线 $BO,CO$ 于 $Q,R$．设 $\triangle AYZ$ 的外接圆在 $Y,Z$ 处的两条切线交于 $T$．证明 $Q,R,O,T$ 四点共圆．



3. **（本题满分 50 分）**给定集合 $A=\{1,2,\ldots,2026\}$，求最大的 $k$，使得猿大在 $A$ 中任意选出 $k$ 个元素后，猿二都可以在剩余元素中选出若干个元素，使两组选出的元素之和相等.

4. **（本题满分 50 分）**已知正整数列 $\{a_n\}$ 满足对任意正整数 $m, n$，均有 $a_{m+n} \mid a_m a_n - 1$．证明存在正整数 $N$，使得 $k > N$ 时 $a_k = 1$.

1. 若正数 $a, b$ 满足

$$2 + \log_2 a = 3 + \log_3 b = \log_6(a + b),$$

求 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

2. 有 10 个中心在原点、以坐标轴为对称轴的椭圆，准线均为 $x=1$. 第 $k$ 个椭圆的离心率为 $e_k=2^{-k}$，求这 10 个椭圆的长轴之和.

3. 设点 $O$ 在 $\triangle ABC$ 外部，且 $\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}=0$，求 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle OBC}$.

4. $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ 是 $2, 3, \ldots, 11$ 的一个排列，记前 $n$ 项和为 $S_n$. 求所有 $S_i$ 均不是 $3$ 的倍数的概率.

5. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB:BC:CC_1=1:1:2$. 二面角 $A-BD_1-A_1$ 为 $\alpha$，求 $\tan\alpha$.

6. 求函数 $f(x)=x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$ 的值域.

7. 实数 $a, b, c$ 满足 $F(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x \geq -1$ 对任意实数 $x$ 恒成立，求 $a + b + c$ 的最大值.

8. 集合 $A$ 有 100 个元素，若子集族中每集至少含 2 个元素，且不同两集的交集至多含 2 个元素，求所有子集元素个数立方和的最大值.

9. 设 $0 < a < b$，过 $A(a,0), B(b,0)$ 分别作直线 $l, m$，与抛物线 $y^2 = x$ 共有四个不同交点 $A_1, A_2, B_1, B_2$. 若四点共圆，求 $l, m$ 交点的轨迹.

10. 证明：是否存在非零复数 $c$ 及实数 $d$，使任意满足 $|z|=1$ 且 $1+z+z^2\neq 0$ 的 $z$ 都有

$$\left|\frac{1}{1+z+z^2}\right|-\left|\frac{1}{1+z+z^2}-c\right|=d?$$

11. 数列 $a_n$ 定义为 $a_n=1$（$n$ 奇）及 $a_n=a_{n/2}/2$（$n$ 偶），$S_n$ 为前 $n$ 项和．证明 $|S_n-2n/3|<1$.

I. 设 $\pi_1, \ldots, \pi_n$ 是 $1, \ldots, n$ 的排列，且 $a_1 \le \cdots \le a_n$、$b_1 \le \cdots \le b_n$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} \min(a_{\pi_i}, b_i) \le \sum_{i=1}^{n} \min(a_i, b_i).$$

II. 设 $O, I$ 为三角形 $ABC$ 的外心、内心，$I_a$ 为 $A$ 旁心；$D$ 为 $\angle BAC$ 外角平分线与 $BC$ 的交点．将 $IA$ 延长过 $A$ 至 $K$，使 $AK = 2AI$；若 $DF$ 是 $\triangle DKI_a$ 外接圆的直径，证明 $OF = 3OI$.

III. 求所有正整数 $x, y$，使

$$\frac{x^4 + y^4 + x^2y^2}{(x+y)^2}$$

为完全平方数.

IV. 一个班有 18 个学生，所需正方形蛋糕面积之和等于一块正方形蛋糕的面积；每次可切出边平行的正方形（允许中间挖出），求总能满足的最大人数.

1. 已知复数 $z$ 满足 $\dfrac{3}{z}+z+2=0$，求 $\left|\dfrac{3}{z}\right|$.

2. 设 $f(n)=\log_{n+1}(n+2)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. 若 $f(1)\cdots f(k)$ 为整数, 称 $k$ 为好数, 求 $[1,2026]$ 内所有好数之和 $M$.

3. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ 为 $1, 2, 3, 4, 5$ 的一个排列，求 $(x_i - x_{i+1})(x_{i+1} - x_{i+2}) < 0$（$i = 1, 2, 3$）的概率.

4. 已知 $A(2,0), B(-1,0)$，$|PA| = 2|PB|$；$Q$ 在圆 $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 1$ 上，$M$ 在直线 $x - y - 2 = 0$ 上，求 $|PM| + |QM|$ 的最小值.

5. $f(x)=x^2-16x+3$. 若 $q\ge 0$ 且 $x\in[q,10]$ 时 $f$ 的值域长度为 $12-q$，求所有 $q$ 之和.

6. 棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$O$ 为中心，$E\in B_1C_1$ 且 $B_1E=\frac{1}{3}B_1C_1$，$F\in AA_1$ 且 $A_1F=\frac{1}{4}AA_1$，求四面体 $B-EFO$ 的体积.

7. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{c}| = 1$ 且 $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, 求 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 的范围.

8. 正整数列 $a_1, \ldots, a_{100}$ 中有一项等于 3，且 $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$. 求这样的数列个数.

9. 若三角形 $ABC$ 的边长分别为 $a, b, c$，满足

$$b - 2a + 4a\sin^2\frac{A+B}{2} = 0, \qquad c = 2\sqrt{3},$$

求面积最大值.

10. 题面若按 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{8}=1$ 理解，曲线是双曲线，与题目所称“椭圆”及后续焦点性质矛盾．以下按椭圆题意采用

$$C:\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$$

整理；若严格采用题面减号，应先更正题面后再使用本解．点 $A(2\sqrt{2},0),B(-2\sqrt{2},0)$，$M,N$ 在上半椭圆，$AM\parallel BN$，且 $AN,BM$ 交于 $Q$．证明两定值并求值.

11. 正实数列 $a_1, \ldots, a_{2026}$ 满足 $a_1 = a_{2026}$ 且

$$a_k + \frac{2}{a_k} = 2a_{k+1} + \frac{1}{a_{k+1}} \quad (1 \le k \le 2025),$$

求 $a_1$ 的最大值.

I. 非负实数 $a_0,\dots,a_n$、$b_0,\dots,b_n$、$c_0,\dots,c_{2n}$ 满足

$$a_i b_j \le c_{i+j}^2 \quad (0 \le i,j \le n).$$

证明 $\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_j\right) \le \left(\sum c_k\right)^2$.

II. 在 $\triangle ABC$ 中，内心为 $I$，$M$ 为 $BC$ 中点，$L$ 为弧 $BAC$ 的中点．过 $M$ 作平行于 $BI, CI$ 的直线分别交 $AB, AC$ 于 $E, F$；$LB, LC$ 分别交 $\triangle BME, CMF$ 的外接圆于 $P, Q$．圆 $(PMQ)$ 与圆 $(EMF)$ 的另一交点为 $N$．证明 $I, M, N$ 共线.

III. 已知整数 $b \geq 2$、实数 $a > 0$ 且 $1/a + 1/b > 1$. 证明 $[a], [2a], [3a], \ldots$ 中有无穷多项是 $b$ 的幂.

IV. 给定 $n \geq 3$ 的 $n \times n$ 点阵，求用首尾相连的线段覆盖全部点所需的最少段数 $k$.

1. $a, b > 0$ 且

$$\left(1 + \frac{1}{a^2 b^2}\right)(a-b)^2 = 72,$$

求 $\left(1 + \frac{1}{ab}\right)(a+b)$ 的最小值.

2. 设 $z$ 为单位复数，求 $\left|z^3+iz+\dfrac{1}{z}\right|$ 的值域.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=3, CA=4, AB=5$，$O$ 为平面上一点，求 $3|OA|+4|OB|+5|OC|$ 的最小值.

4. $A=\{1,2,3,4,5\}$. $M$ 是 $A$ 的子集构成的集合，$M$ 中任意两个元素的交集都非空，且 $|M|$ 最大. 求满足条件的 $M$ 的个数.

5. $1 < a < b$，且 $1, a, b$ 不能作三边长，也不能作三条高的长度，求 $b$ 的最小值.

6. 圆锥底面半径与高均为 $1$，平面 $\alpha$ 过高的中点且与底面有唯一公共点，将圆锥分成体积 $V_1 < V_2$ 两部分，求 $V_1/V_2$.

7. 若恰有三组非零实数对 $(a,b)$ 满足

$$|a+b+1| = |4a-3b+1| = t\sqrt{a^2+b^2},$$

求 $t$ 的所有可能值.

8. 从 $\{1,\ldots,10\}$ 任取四元子集，要求其中任意三个数既不成等差数列也不成等比数列，求概率.

9. 求最小正整数 $n$，使存在非负递增数列 $a_1 \le \cdots \le a_n$、$b_1 \le \cdots \le b_n$，且两列和均至少 $L = 2026^{2026}$，并满足 $\sum_{i=1}^{n} \min(a_i, b_i) \le L^{-1}$.

10. 求所有 $\lambda > 0$，使过 $N(1,3)$ 作两条垂直直线与椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 交于四点且四点共圆.

11. 已知 $|a_0| = \cdots = |a_n| = 1$，复数 $y, z$ 是 $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ 的两个根，证明 $|y| < 4|z|$.

I. 设 $x_1 \geq \cdots \geq x_{100} \geq 0$，并要求证明

$$x_1 + x_2 + x_3 > \frac{1}{2} \sum_{i=4}^{100} x_i.$$

II. 如图，$O, I$ 分别为三角形 $ABC$ 的外心、内心，$E, F$ 分别为 $CA, AB$ 上的旁切圆切点。过 $O$ 作 $EF$ 的垂线 $l$，令 $K = AI \cap l$，令 $M = AI \cap \odot(ABC)$（异于 $A$），证明 $AI = 2KM$.

III. 在一个 $n \times n$ 表格中，每行每列恰有一家银行。桥是满足相邻格共享边且行号、列号均单调的格子链；若建 $T$ 座桥、总长度为 $S$，费用为 $S + nT$．求使费用统一为 $O(n^{\alpha})$ 的最小 $\alpha$.

IV. 定义 $\#(x,N)$ 为二进制展开从小数点后第 $N$ 位向前（含整数部分）出现的 $1$ 的个数。若正无理数 $y$ 满足：对任意 $\eta>0$，有无穷多个 $N$ 使 $\#(y,N)<\eta N^{1/d}$（$d>1$ 为整数），证明 $y^d$ 无理.