不等式习题集

1 习题一

Problem 1.1 (6)**.** 给定大于 1 的自然数 a, b, n, A_{n-1} 和 A_n 是 a 进制数, B_{n-1} 和 B_n 是 b 进制数, $A_{n-1}, A_n, B_{n-1}, B_n$ 定义为:

$$A_n = x_n x_{n-1} \cdots x_0, \quad A_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_0 \quad (\text{按 } a \text{ 进制写出}),$$
$$B_n = x_n x_{n-1} \cdots x_0, \quad B_{n-1} = x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_0 \quad (\text{按 } b \text{ 进制写出}),$$

其中 $x_n \neq 0$, $x_{n-1} \neq 0$. 求证: 当 $a > b$ 时, 有

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

Solution. 记 $A_{n-1} = x_{n-1}a^{n-1} + x_{n-2}a^{n-2} + \cdots + x_0$, $B_{n-1} = x_{n-1}b^{n-1} + x_{n-2}b^{n-2} + \cdots + x_0$.

$$\begin{aligned} \text{左} &= (x_n a^n + A_{n-1})B_{n-1} - A_{n-1}(x_n b^n + B_{n-1}) \\ &= x_n(a^n B_{n-1} - b^n A_{n-1}) \\ &= x_n\big[x_{n-1}(a^n b^{n-1} - a^{n-1}b^n) + x_{n-2}(a^n b^{n-2} - a^{n-2}b^n) \\ &\qquad + \cdots + x_0(a^n - b^n)\big] > 0, \end{aligned}$$

因为 $a > b$ 时 $a^n b^{n-k} > a^{n-k} b^n$ 对 $k = 1, 2, \ldots, n$ 成立, 且 $x_i \geq 0$. □

Problem 1.2 (9)**.** 已知 $5n$ 个实数 r_i, s_i, t_i, u_i, v_i 都大于 1 ($1 \leq i \leq n$), 记

$$R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i, \quad S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i, \quad T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i, \quad U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i, \quad V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i.$$

求证下述不等式成立:

$$\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{r_i s_i t_i u_i v_i + 1}{r_i s_i t_i u_i v_i - 1}\Big) \geq \Big(\frac{RSTUV + 1}{RSTUV - 1}\Big)^n.$$

Solution. 设 $x_i = r_i s_i t_i u_i v_i > 1$, $A = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$. 先证引理: 对 $x_i > 1$ 有

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i + 1}{x_i - 1} \geq \Big(\frac{A+1}{A-1}\Big)^n. \tag{1}$$

不妨设 $1 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$, 则 $x_1 \leq A \leq x_n$. 先考虑首尾两项:

$$\frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{x_n + 1}{x_n - 1} \geq \frac{A+1}{A-1} \cdot \frac{\frac{x_1 x_n}{A} + 1}{\frac{x_1 x_n}{A} - 1},$$

只需证 $x_1+x_n \geq \dfrac{x_1x_n}{A}+A$, 即 $A(x_1+x_n)\geq x_1x_n+A^2$.

再考虑 $x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},\dfrac{x_1x_n}{A}$, 几何平均为 $\sqrt[n]{\dfrac{A^n}{A}}=A$, 反复用 (1) 易证.

从而原式左 $\geq \left(\frac{B+1}{B-1}\right)^n$, 其中 $B=\sqrt[n]{\prod_i(r_is_it_iu_iv_i)}$. 由 $R\geq\sqrt[n]{\prod r_i}$ 等得 $RSTUV\geq B$, 且 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 递减, 故

$$\frac{B+1}{B-1}\geq\frac{RSTUV+1}{RSTUV-1},$$

即 (2) 成立, 原得证.

法二 (Jensen). 令 $a_i=r_is_it_iu_iv_i$, $x_i=\ln a_i>0$. 函数 $f(x)=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数, 由 Jensen 不等式

$$\frac{1}{n}\sum f(x_i)\geq f\Big(\frac{\sum x_i}{n}\Big).$$

□

Problem 1.3 (11)**.** 如果 $a,b,c\in\mathbb{R}$, 求证 (Hölder 不等式):

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)\geq(ab+bc+ca)^3.$$

Solution. 若 $ab+bc+ca\leq 0$, 显然成立 (因 $a^2+ab+b^2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$).

下设 $q=ab+bc+ca>0$. 有恒等式

$$\big(a^2+ab+b^2\big)\big(b^2+bc+c^2\big)\big(c^2+ca+a^2\big)-(ab+bc+ca)^3=(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2-abc(a+b+c)^3.$$

下设 $rp>0$ 其中 $r=abc$, $p=a+b+c$, 则 a,b,c 必同号 (否则一正两负得 $r>0,p>0$ 但 $q<0$, 矛盾; 一负两正亦矛盾). 于是由 Hölder 不等式即得. □

Problem 1.4 (12)**.** 求证: 对任意 $c>0$, 存在正整数 n 和复数列 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 使

$$c\cdot\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}|\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\cdots+\varepsilon_na_n|<\Big(\sum_{j=1}^n|a_j|^{3/2}\Big)^{2/3},$$

其中 $\varepsilon_j\in\{-1,1\}$, $j=1,2,\ldots,n$.

Solution. 设 $S=\sum_\varepsilon\big|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\big|^2$.

$$S=\sum_\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n\overline{a_i}\varepsilon_i\Big)=\sum_\varepsilon\Big(\sum_{i=1}^n|a_i|^2+\sum_{i\neq j}a_i\overline{a_j}\varepsilon_i\varepsilon_j\Big).$$

因 $\sum_\varepsilon\varepsilon_i\varepsilon_j=0$ 对 $i\neq j$, 故 $S=n\cdot 2^n$. 取 $|a_i|=1$, 则需

$$c\cdot\sqrt{\frac{n}{2^n}}=c\sqrt{n}\leq n^{2/3}\implies n^{1/6}\geq c,\ n\geq c^6.$$

□

Problem 1.5 (15)**.** 已知正整数 $n\geq 3$, $[-1,1]$ 中的实数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 满足 $\sum_{k=1}^n x_k^5=0$. 求证: $\sum_{k=1}^n x_k\leq\frac{8}{15}n$.

Solution. 由 $x_k \in [-1,1]$ 知 $1+x_k \geq 0$. 对 $\forall B \in \mathbb{R}$ 有 $(1+x_k)(Bx_k-1)^4 \geq 0$. 展开得

$$(1+x_k)(B^4x_k^4 - 4B^3x_k^3 + 6B^2x_k^2 - 4Bx_k + 1).$$

令三次项消失: $B^2(6-4B)=0 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$. 代入得

$$5x_k \leq 1 + \frac{81}{16}x_k^5 - \frac{135}{16}x_k^4 + \frac{15}{2}x_k^2,$$

求和得

$$5\sum x_k \leq n + \frac{15}{2}\sum\left(x_k^2 - \frac{9}{8}x_k^4\right).$$

设 $t=\sum x_k^2$, 则 $\sum x_k^4 \geq \frac{t^2}{n}$. 由 $y = t - \frac{9}{8}t^2 \leq \frac{2}{9}$ 得 $\sum x_k \leq \frac{8}{15}n$.

另一方法: 只需证 $x \leq \frac{8}{15} + \frac{81}{80}x^5$ 对 $x \in [-1,1]$ 成立, 即 $\frac{81}{80}x^5 - x + \frac{8}{15} \geq 0$. 因式分解得 $(3x-2)^2(27x^3+36x^2+36x+32) \geq 0$, 其中三次项在 $[-1,1]$ 上恒正. □

Problem 1.6 (17)**.** 设 $x,y,z \geq 0$, 求证:

$$x(y+z-x)^2 + y(z+x-y)^2 + z(x+y-z)^2 \geq 3xyz,$$

并确定等号成立的条件.

Solution. 设 $p=x+y+z$, $q=xy+yz+zx$, $r=xyz$. 即证 $\sum x(p-2x)^2 \geq 3r$.

$$\begin{aligned} \text{左} &= \sum x(p^2 - 4px + 4x^2) \\ &= p^2\sum x - 4p\sum x^2 + 4\sum x^3 \\ &= p^3 - 4p(p^2-2q) + 4(p^3 - 3pq + 3r) \\ &= p^3 - 4pq + 12r \geq 3r, \end{aligned}$$

即 $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, 此即 Schur 不等式. 等号当 $x=y=z$ 或其中之一为 0 且另两个相等时成立. □

Problem 1.7 (19)**.** 设 $x,y,z \in \mathbb{R}_+$, 求证:

$$(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right] \geq \frac{9}{4}.$$

Solution. **法一 (换元)**. 令 $a=xy$, $b=yz$, $c=zx$, 则 $x=\sqrt{\frac{ac}{b}}$, $y=\sqrt{\frac{ba}{c}}$, $z=\sqrt{\frac{cb}{a}}$. 于是 $x+y = \sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$, $(x+y)^2 = a\cdot\frac{(b+c)^2}{bc}$. 故原式等价于 $\sum a \sum \frac{bc}{a(b+c)^2} \geq \frac{9}{4}$. 不妨设 $\sum a = 1$, 即证 $\sum \frac{4bc}{a(b+c)^2} \geq 9$.

法二. 不妨设 $q=\sum xy = 1$, 即证 $\sum \frac{1}{(x+y)^2} \geq \frac{9}{4}$. 化为关于 $p=x+y+z$, $r=xyz$ 的不等式

$$\frac{1}{(p-r)^2}(p^4 - 2p^2 + 4pr + 1) \geq \frac{9}{4},$$

整理得 $f(r) = -9r^2 + 34pr + 4p^4 - 17p^2 + 4 \geq 0$. □

2 习题二

Problem 2.1 (8). 设 $n(\geq 3)$ 为正整数, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为实数, 且 $x_i < x_{i+1}$ 对 $1 \leq i \leq n-1$. 求证:

$$\frac{n(n-1)}{2} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j > \Big[\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i\Big]\Big[\sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j\Big].$$

Solution. 令 $y_i = \sum_{j=i+1}^{n} x_j$, $y = \sum_{j=2}^{n}(j-1)x_j$, $z_i = \frac{n(n-1)}{2}y_i - (n-i)y$ $(1 \leq i \leq n-1)$. 则

$$\text{左} - \text{右} = \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \sum_{j=i+1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)x_i y = \sum_{i=1}^{n-1} x_i z_i.$$

注意 $\sum_{i=1}^{n-1} y_i = y$ 且 $\sum_{i=1}^{n-1} z_i = 0$. 由 x_i 严格递增及 $\frac{y_i}{n-i}$ (尾部平均数) 关于 i 递增, 知 $\frac{z_i}{C(n-i)}$ 从负到正至多一次变号, 存在 k 使 $z_1, \ldots, z_k \leq 0$, $z_{k+1}, \ldots, z_{n-1} > 0$. 取 $a = x_k$, 则 $\sum x_i z_i = \sum (x_i - a)z_i > 0$. □

Problem 2.2 (10). 设整数 $n \geq 2$, 实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$, 求证:

$$\sum_{1 \leq k < l \leq n} k x_k x_l \leq \frac{n-1}{3}\sum_{k=1}^{n} k x_k.$$

Solution. 由 $x_i x_j \leq x_i$ (因 $x_j \leq 1$), 得

$$3\sum_{k<l} k x_k x_l = \sum_{k<l} 3k x_k x_l \leq \sum_{k<l}(k x_k + 2k x_l).$$

考虑系数: 对固定 k,

- 以 k 为第一指标: l 取 $k+1, \ldots, n$, 贡献 $k \cdot (n-k)$;
- 以 k 为第二指标: i 取 $1, \ldots, k-1$, 贡献 $2i$ 求和得 $k(k-1)$.

总计系数为 $(n-k)k + k(k-1) = k(n-1)$, 故

$$3\sum_{k<l} k x_k x_l \leq (n-1)\sum_{k=1}^{n} k x_k.$$

□

Problem 2.3 (14). 已知 $a_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. 定义 $A_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$, 求证:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leq 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Solution. 由 $a_k = kA_k - (k-1)A_{k-1}$, 得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} A_k a_k &= \sum_{k=1}^{n} A_k[kA_k - (k-1)A_{k-1}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} kA_k^2 - \sum_{k=1}^{n}(k-1)A_kA_{k-1} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} kA_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)(A_k^2 + A_{k-1}^2) \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k^2.\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式,

$$\sum A_k^2 \leq 2\sum A_k a_k \leq 2\Big(\sum A_k^2\Big)^{1/2}\Big(\sum a_k^2\Big)^{1/2},$$

故 $\sum A_k^2 \leq 4\sum a_k^2$. □

Problem 2.4 (2)**.** 若椭圆 $\dfrac{x^2}{m^2} + \dfrac{y^2}{n^2} = 1$ $(m, n > 0)$ 经过点 $P(a, b)$ $(ab \neq 0,\ |a| \neq |b|)$, 求 $m + n$ 的最小值.

Solution. 不妨设 $a > 0$, $b > 0$. 令 $a = m\cos\alpha$, $b = n\sin\alpha$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. 则

$$m + n = \frac{a}{\cos\alpha} + \frac{b}{\sin\alpha}.$$

设 $t = \tan\alpha \in (0, +\infty)$, 则

$$\begin{aligned}(m+n)^2 &= a^2(1+t^2) + b^2\Big(1 + \frac{1}{t^2}\Big) + 2ab\Big(\frac{1}{t} + t\Big) \\ &= a^2 + b^2 + a\Big(at^2 + \frac{2b}{t}\Big) + b\Big(\frac{b}{t^2} + 2at\Big) \\ &\geq a^2 + b^2 + 3a\sqrt[3]{ab^2} + 3b\sqrt[3]{a^2b} \\ &= (a^{2/3} + b^{2/3})^3.\end{aligned}$$

从而 $(m+n)_{\min} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$, 当 $t = (b/a)^{1/3}$ 时取等. □

Problem 2.5 (4)**.** 设 $x, y, z \in \mathbb{R}_+$, 求证:

$$\frac{x+y+z}{3} \cdot \sqrt[3]{xyz} \leq \Big(\frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2}\Big)^{2/3}.$$

Solution. 令 $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$, 则 a, b, c 为三角形三边, 半周长 $p = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z$. 原式等价于

$$\frac{1}{3}p\big[(p-a)(p-b)(p-c)\big]^{1/3} \leq (abc)^{2/3} \cdot \frac{1}{4}.$$

代入 $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ 及 $S = \frac{abc}{4R}$, 得

$$\frac{1}{3}p\Big(\frac{S^2}{p}\Big)^{1/3} \leq (4RS)^{2/3} \cdot \frac{1}{4} \iff \frac{1}{3}p^{2/3} \leq 2^{2/3}R^{2/3} \iff p \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R,$$

即 $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$, 亦即

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

由 Jensen 不等式 ($y = \sin x$ 在 $(0, \pi)$ 上凹) 知上式成立. □

Problem 2.6 (8). 已知 a,b,c,d,e 为正实数, 且 $abcde=1$, 求证:

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}+\frac{b+bcd}{1+bc+bcde}+\frac{c+cde}{1+cd+cdea}+\frac{d+dea}{1+de+deab}+\frac{e+eab}{1+ea+eabc}\geq\frac{10}{3}.$$

Solution. 令 $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{z}{y}$, $c=\frac{u}{z}$, $d=\frac{v}{u}$, $e=\frac{x}{v}$, 其中 $x,y,z,u,v\in\mathbb{R}_+$. 则

$$\frac{a+abc}{1+ab+abcd}=\frac{\frac{y}{x}+\frac{u}{x}}{1+\frac{z}{x}+\frac{v}{x}}=\frac{y+u}{x+z+v}.$$

原式化为

$$\frac{y+u}{x+z+v}+\frac{z+v}{y+u+x}+\frac{u+x}{z+v+y}+\frac{v+y}{u+x+z}+\frac{x+z}{v+y+u}\geq\frac{10}{3}.$$

由 Cauchy 不等式,

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{y+u}{x+z+v}=\sum_{\text{cyc}}\frac{(y+u)^2}{(y+u)(x+z+v)}\geq\frac{(\sum(y+u))^2}{\sum(y+u)(x+z+v)}\geq\frac{10}{3}.$$

□

Problem 2.7 (11). 求证: 在开区间 $(0,1)$ 内一定能找到四对两两不同的正数 (a,b) $(a\neq b)$, 满足:

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}>\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab-\frac{1}{8ab}.$$

Solution. 令 $a=\cos\alpha$, $b=\cos\beta$, $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$. 则 $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\sin\alpha\sin\beta$, 且 $\cos(\alpha-\beta)=ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$. 于是

$$\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}=\frac{1}{2ab}\left[\cos^2(\alpha-\beta)-1\right]+\frac{a}{2b}+\frac{b}{2a}-ab.$$

代入原式只需

$$\frac{1}{2ab}[\cos^2(\alpha-\beta)-1]>-\frac{1}{8ab}\iff\cos^2(\alpha-\beta)-1>-\frac{1}{4},$$

即 $\cos(\alpha-\beta)>\frac{\sqrt{3}}{2}$, 只需 $|\alpha-\beta|\in(0,\frac{\pi}{6})$. 取四对这样的 (α,β) 即得四对 (a,b). □

3 习题四

Problem 3.1 (4). 设 a,b,c 为正实数, 且 $a+b+c\geq abc$, 求证:

$$a^2+b^2+c^2\geq abc.$$

Solution. (反证法) 若 $a^2+b^2+c^2<abc$, 则 $a^2<a^2+b^2+c^2<abc$, 故 $a<bc$. 同理 $b<ca$, $c<ab$. 从而

$$a+b+c<bc+ca+ab.$$

又由 $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$ (因 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq0$), 得 $a+b+c<a^2+b^2+c^2<abc$, 与 $a+b+c\geq abc$ 矛盾. □

Problem 3.2. 设 $n \in \mathbb{N}_+$, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中两两不同的数, 满足对任意 $1 \le i \le j \le m$ 有 $a_i + a_j \le n$, 且存在 $1 \le k \le m$ 使 $a_i + a_j = a_k$. 求证:

$$\frac{1}{m}(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \ge \frac{1}{2}(n+1).$$

Solution. 即证 $2\sum_{i=1}^m a_i \ge m(n+1)$. 不妨设 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$. 由题设, $\exists k$ 使 $a_i + a_{m+1-i} = a_k$. 进一步, $a_i + a_{m+1-j}$ $(j = 1, 2, \ldots, i)$ 给出 i 个不同的值, 均大于 a_i, 与 $a_1 > a_2 > \cdots > a_m$ 中仅有 $i-1$ 个大于 a_i 矛盾. 故 $\sum_{i=1}^m (a_i + a_{m+1-i}) \ge m(n+1)$. □

Problem 3.3 (12)**.** 设 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n$ 是满足下列条件的 n 个实数: 对任何正整数 k, 有 $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k \ge 0$. 令 $p = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$, 求证: $p = a_1$, 并且对任意 $x > a_1$, 均有

$$(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n) \le x^n - a_1^n.$$

Solution. (1) 由 $k = 1$ 得 $a_1 + \cdots + a_n \ge 0$, 故 $a_1 > 0$. 若 $p = |a_n| > a_1$, 则 $a_n < 0$ 且 $|a_n| > a_1$. 取奇数 $k = 2l+1$ 充分大, 使

$$\left(\frac{a_1}{a_n}\right)^{2l+1} + \cdots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^{2l+1} + 1 < 0,$$

则 $a_1^{2l+1} + \cdots + a_n^{2l+1} < 0$, 矛盾. 故 $p = a_1$.

(2) 由 $x > a_1 > 0$ 知 $x - a_j > 0$. 由 AM-GM 不等式,

$$(x - a_2)\cdots(x - a_n) \le \left(\frac{(x - a_2) + \cdots + (x - a_n)}{n-1}\right)^{n-1} = \left(x - \frac{a_2 + \cdots + a_n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

由 (1) 知 $a_2 + \cdots + a_n \ge -a_1$, 故

$$x - \frac{a_2 + \cdots + a_n}{n-1} \le x + \frac{a_1}{n-1}.$$

于是

$$(x - a_1)\prod_{j=2}^n (x - a_j) \le (x - a_1)\left(x + \frac{a_1}{n-1}\right)^{n-1} \le (x - a_1)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}a_1^i = x^n - a_1^n.$$

法二. 令 $b_i = \frac{a_i}{a_1}$, $z = \frac{a_1}{x}$, 则 $b_1 = 1$, $-1 \le b_i \le 1$, 且 $b_1 + \cdots + b_n \ge 0 \Rightarrow b_2 + \cdots + b_n \ge -1$. 需证

$$\prod_{i=1}^n (1 - zb_i) \le 1 - z^n \iff \prod_{i=2}^n (1 - zb_i) \le 1 + z + \cdots + z^{n-1}.$$

设 $\bar{b} = \frac{1}{n-1}(b_2 + \cdots + b_n) \ge -\frac{1}{n-1}$. 函数 $f(t) = \ln(1 - zt)$ 是凹函数 $(f''(t) < 0)$, 由 Jensen 得

$$\sum_{i=2}^n f(b_i) \le (n-1)f(\bar{b}) \implies \prod_{i=2}^n (1 - zb_i) \le \left(1 + \frac{z}{n-1}\right)^{n-1} = \sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}\left(\frac{z}{n-1}\right)^r \le \sum_{r=0}^{n-1} z^r.$$

□