锐角三角形中的三线共点

题目： 在锐角三角形 ABC 中，点 P 是其内部满足 $AP \perp BC$ 的点。ω 是 $\triangle PBC$ 的内切圆，圆心为 J，且 ω 与 BC 相切于点 D。点 K 是直线 BC 上满足 $KP = KD$ 的点。

点 X 与点 C 位于直线 AB 的两侧，且满足

$$BX = BP, \qquad \angle BXA = 90^\circ;$$

点 Y 与点 B 位于直线 AC 的两侧，且满足

$$CY = CP, \qquad \angle AYC = 90^\circ.$$

过 K 作 $KL \perp AJ$，交 ω 于点 L；点 Z 在 AJ 上，且 LZ 平分 $\angle ALJ$。证明：PZ、BX、CY 三线共点。

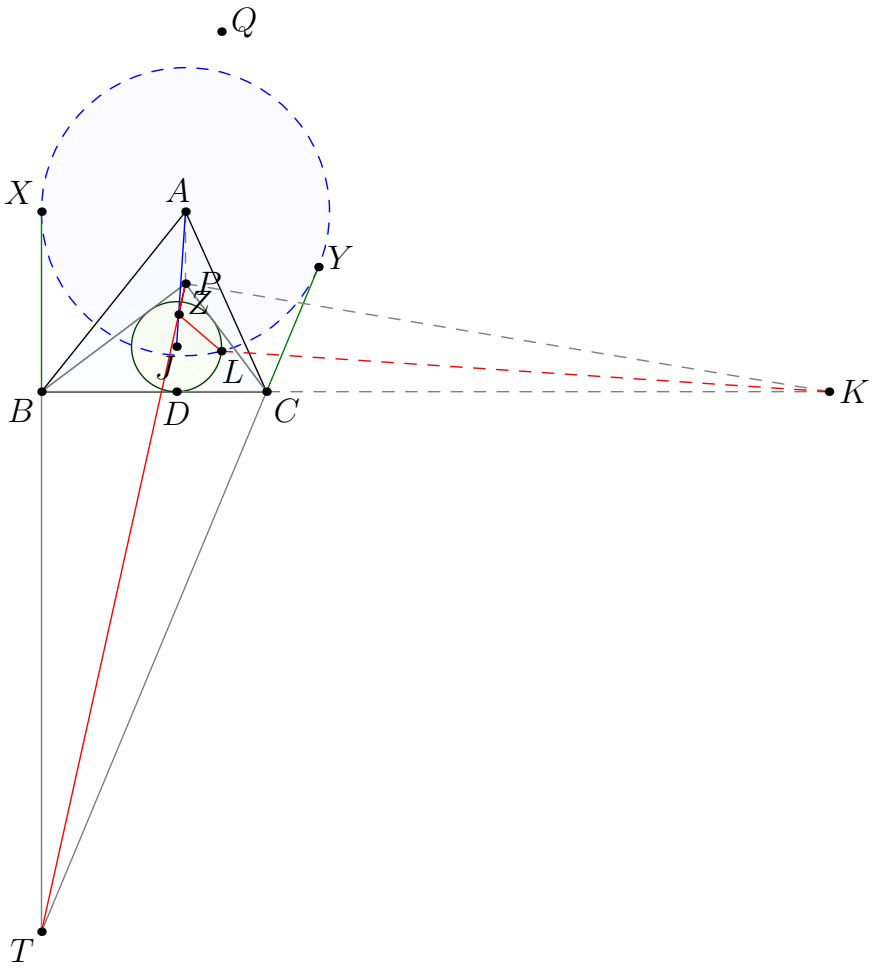


图 1　题设构型。浅蓝色虚线圆为证明中引入的圆 Γ；$T = BX \cap CY$。

解答： 记 H 为 A 到 BC 的垂足，令 $T = BX \cap CY$。以 A 为圆心、以 AX 为半径的圆记为 Γ；以 K 为圆心、经过 P, D 的圆记为 κ。

由 $\angle BXA = 90^\circ$ 及 $BX = BP$，有

$$\begin{aligned} AX^2 &= AB^2 - BX^2 = AB^2 - BP^2 \\ &= (AH^2 + BH^2) - (PH^2 + BH^2) = AH^2 - PH^2. \end{aligned}$$

同理，由 $\angle AYC = 90^\circ$ 及 $CY = CP$，

$$AY^2 = AC^2 - CP^2 = (AH^2 + CH^2) - (PH^2 + CH^2) = AH^2 - PH^2.$$

因此

$$AX = AY =: r_A.$$

所以 X,Y 都在圆 Γ 上。又因为

$$AX \perp BX, \qquad AY \perp CY,$$

故 BX,CY 分别是圆 Γ 在 X,Y 处的切线。于是，从点 T 引圆 Γ 的两条切线，切线长相等，即

$$TX = TY. \tag{1}$$

圆 κ 的半径为 $KD = KP$。在点 D 处，

$$JD \perp BC \parallel KD,$$

所以圆 κ 与圆 ω 在 D 处正交。等价地，

$$KJ^2 = KD^2 + JD^2, \qquad KJ^2 - JD^2 = KD^2. \tag{2}$$

另一方面，由 K,H,D 共线且 $AP \perp BC$，

$$KA^2 - KP^2 = AH^2 - PH^2 = r_A^2.$$

结合 $KP = KD$，得到

$$KA^2 - r_A^2 = KD^2. \tag{3}$$

式 (2)、式 (3) 说明

$$\mathrm{Pow}_\omega(K) = KJ^2 - JD^2 = KD^2 = KA^2 - r_A^2 = \mathrm{Pow}_\Gamma(K).$$

因此，K 在圆 ω 与圆 Γ 的根轴上。两圆心的连线为 AJ，根轴必垂直于 AJ；而题设中的直线 KL 正是过 K 的这条垂线。由于 $L \in \omega$，可知

$$L \in \Gamma, \qquad AL = r_A, \qquad JL = JD =: r_J. \tag{4}$$

在三角形 ALJ 中，LZ 是内角平分线，所以由角平分线定理，

$$\frac{AZ}{ZJ} = \frac{AL}{LJ} = \frac{r_A}{r_J}. \tag{5}$$

由题设的点位关系，图中点的顺序为 $T-B-X$、$T-C-Y$。结合 (1) 以及 $BX = BP, CY = CP$，得到

$$TB + BP = TX = TY = TC + CP. \tag{6}$$

这里使用 Pitot 逆定理：凸四边形两组对边的长度和相等时，存在一个圆与它的四条边所在的直线相切；若圆位于四边形外侧，则相应地视为旁切圆，结论用有向线段表述时仍然成立。把 P,B,T,C 按此顺序看作四边形，式 (6) 给出

$$PB + BT = TC + CP,$$

所以存在一个圆 Ω 与四条直线

$$PB, \quad BT, \quad TC, \quad CP$$

相切。记其圆心为 Q，半径为 r_Q。这里允许 Ω 是四边形 $PBTC$ 的旁切圆；这正是图中点位关系下所需的分支。

圆 ω 与圆 Ω 都与直线 PB, PC 相切，因此它们的圆心 J,Q 都在 $\angle BPC$ 的同一条角平分线所在直线上，即

$$P, J, Q \text{ 共线}.$$

两圆均与同一角的两边相切，圆心到顶点的距离与半径之比只由该角决定，故

$$\frac{JP}{PQ} = \frac{r_J}{r_Q}. \tag{7}$$

同理，圆 Γ 与圆 Ω 都与 TB, TC 相切，因此

$$T, A, Q \text{ 共线}, \qquad \frac{AT}{TQ} = \frac{r_A}{r_Q}. \tag{8}$$

由 (5)、(7)、(8)，在三角形 AJQ 中，点 Z,P,T 分别位于直线 AJ,JQ,AQ 上，并且

$$\frac{AZ}{ZJ}\cdot\frac{JP}{PQ}\cdot\frac{QT}{TA}=\frac{r_A}{r_J}\cdot\frac{r_J}{r_Q}\cdot\frac{r_Q}{r_A}=1.$$

按有向线段使用梅涅劳斯定理，得到

$$P,Z,T \text{ 共线.}$$

而 $T\in BX$ 且 $T\in CY$，所以 PZ、BX、CY 三线共点，公共点就是

$$T=BX\cap CY.$$

□

补充验证： $AX=AL$. 这个猜想成立。由 $AP\perp BC$ 且 H 是垂足，知 A,P,H 共线；又因 $K,H\in BC$，由勾股定理，

$$KA^2-KP^2=(AH^2+KH^2)-(PH^2+KH^2)=AH^2-PH^2=AX^2.$$

结合 $KP=KD$，得到

$$\mathrm{Pow}_\Gamma(K)=KA^2-AX^2=KP^2=KD^2. \tag{9}$$

另一方面，$JD\perp BC$ 且 $K,D\in BC$，所以

$$\mathrm{Pow}_\omega(K)=KJ^2-JD^2=KD^2. \tag{10}$$

由 (9)、(10)，点 K 对圆 Γ 与圆 ω 的幂相等，故两圆的根轴经过 K。根轴垂直于圆心连线 AJ，因而就是题设中的直线 KL。又 $L\in\omega$，所以 L 也在圆 Γ 上。圆 Γ 的圆心为 A、半径为 AX，于是

$$AL=AX.$$