Aczél 不等式：二次函数判别式与 Lorentz 型二次型

LeyuDame

2026 年 8 月 10 日

1 Aczél 不等式

设 $n \geq 2$，且 $a_i, b_i > 0$。记

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad S(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

并定义

$$\mathcal{Q}(v) = S(v)^2 - \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \qquad \mathcal{B}(u,v) = S(u)S(v) - \sum_{i=1}^{n} u_i v_i. \tag{1}$$

这里 $u, v \in \mathbb{R}^n$，$\mathcal{Q}(v) = \mathcal{B}(v,v)$。

定理 1.1 (Aczél 不等式)

在上述条件下，

$$\mathcal{B}(a,b)^2 \geq \mathcal{Q}(a)\mathcal{Q}(b). \tag{2}$$

写成求和形式，即

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \geq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{3}$$

由

$$\mathcal{Q}(a) = 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j, \qquad \mathcal{Q}(b) = 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} b_i b_j, \tag{4}$$

可知 $\mathcal{Q}(a) > 0$ 与 $\mathcal{Q}(b) > 0$。这两个正性条件正是判别式证明所需的开口方向条件。

2 判别式证明

2.1 构造二次函数

对 $x \in \mathbb{R}$，令

$$\Phi(x) = \mathcal{Q}(xa - b). \tag{5}$$

由定义，

$$\Phi(x) = (xS(a) - S(b))^2 - \sum_{i=1}^{n} (xa_i - b_i)^2. \tag{6}$$

将其展开：

$$\begin{aligned}\Phi(x) = &\left(S(a)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 \\ &- 2\left(S(a)S(b) - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x \\ &+ \left(S(b)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \\ = &\mathcal{Q}(a)x^2 - 2\mathcal{B}(a,b)x + \mathcal{Q}(b).\end{aligned} \tag{7}$$

因此，$\Phi(x)$ 的判别式为

$$\Delta = 4\left(\mathcal{B}(a,b)^2 - \mathcal{Q}(a)\mathcal{Q}(b)\right). \tag{8}$$

要证明（2），只需证明 $\Delta \geq 0$。

2.2 特殊值的确定

式（6）中的第一项是

$$(xS(a) - S(b))^2.$$

取

$$x_0 = \frac{S(b)}{S(a)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \tag{9}$$

便有

$$x_0 S(a) - S(b) = 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\Phi(x_0) &= -\sum_{i=1}^{n} (x_0 a_i - b_i)^2 \\ &\leq 0.\end{aligned} \tag{10}$$

2.3 判别式的结论

由（4）可知，$\Phi(x)$ 是开口向上的二次函数。若 $\Delta < 0$，则 $\Phi(x) > 0$ 对一切 $x \in \mathbb{R}$ 成立，这与（10）矛盾。因此 $\Delta \geq 0$。结合（8），得到

$$\mathcal{B}(a,b)^2 \geq \mathcal{Q}(a)\mathcal{Q}(b),$$

定理得证。

> **注 2.1.** 在 $a_i, b_i > 0$ 的条件下，等号成立当且仅当 a 与 b 成比例。事实上，等号成立时必须有 $\Phi(x_0) = 0$，从而
>
> $$x_0 a_i - b_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

3 二元情形

当 $n=2$ 时，不等式（3）化为

$$(a_1b_2+a_2b_1)^2 \geq 4a_1a_2b_1b_2. \tag{11}$$

其证明就是

$$\begin{aligned}(a_1b_2+a_2b_1)^2-4a_1a_2b_1b_2 &= (a_1b_2-a_2b_1)^2\\ &\geq 0.\end{aligned} \tag{12}$$

因此，$n=2$ 时的 Aczél 不等式退化为平方非负；一般情形可以看作将这一平方结构组织成一个统一的二次函数。

4 Lorentz 型二次型

4.1 平均方向与偏离方向

令

$$\mathbf{1}=(1,\dots,1), \qquad e=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}.$$

任意 $v\in\mathbb{R}^n$ 可以唯一分解为

$$v=ue+v_\perp, \qquad v_\perp \perp e. \tag{13}$$

由于 $S(v)=\sqrt{n}\,u$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(v) &= S(v)^2-\|v\|^2\\ &= nu^2-\left(u^2+\|v_\perp\|^2\right)\\ &= (n-1)u^2-\|v_\perp\|^2.\end{aligned} \tag{14}$$

因此，$\mathcal{Q}$ 在平均方向 e 上为正，在正交补空间上为负。从矩阵表示看，

$$\mathcal{Q}(v)=v^{\mathsf{T}}(\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}-I_n)v, \tag{15}$$

而矩阵 $\mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}-I_n$ 的特征值为 $n-1,-1,\dots,-1$。这说明 $\mathcal{Q}$ 是签名为 $(1,n-1)$ 的不定二次型。

在 $n=2$ 时，取

$$u=\frac{v_1+v_2}{\sqrt{2}}, \qquad w=\frac{v_1-v_2}{\sqrt{2}},$$

则

$$\mathcal{Q}(v)=u^2-w^2. \tag{16}$$

零集 $\mathcal{Q}(v)=0$ 是两条直线 $w=\pm u$，构成二维光锥。

4.2 判别式与零锥的相交

由（5）和（1），

$$\Phi(x)=\mathcal{Q}(xa-b). \tag{17}$$

因此，方程 $\Phi(x)=0$ 描述直线

$$c(x)=xa-b \tag{18}$$

与零锥 $\mathcal{Q}(c)=0$ 的交点。

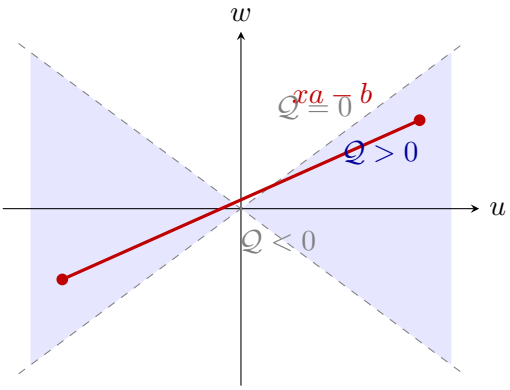


图 1: $n = 2$ 时的零锥与直线 $xa - b$。

在 $x = 0$ 时，$c(0) = -b$，且

$$\mathcal{Q}(c(0)) = \mathcal{Q}(b) > 0.$$

当 x 充分大时，

$$\mathcal{Q}(c(x)) \sim x^2 \mathcal{Q}(a) > 0.$$

另一方面，由（9）和（10），

$$S(c(x_0)) = 0, \qquad \mathcal{Q}(c(x_0)) = -\|c(x_0)\|^2 \le 0.$$

所以直线 $c(x)$ 从正区域出发，经过非正区域，最后回到正区域。相应的二次函数 $\Phi(x)$ 必有实根；这就是

$$\Delta \ge 0.$$

代数证明中的“取特殊值”与几何中的“使平均方向分量为零”是同一个操作。

4.3 与狭义相对论的关系

在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义

$$\langle (t, x), (s, y) \rangle_L = ts - x \cdot y. \tag{19}$$

令

$$\widetilde{a} = (S(a), a), \qquad \widetilde{b} = (S(b), b),$$

则

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{a}, \widetilde{a} \rangle_L &= \mathcal{Q}(a), \\ \langle \widetilde{b}, \widetilde{b} \rangle_L &= \mathcal{Q}(b), \\ \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle_L &= \mathcal{B}(a, b). \end{aligned} \tag{20}$$

Aczél 不等式于是写成

$$\langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \rangle_L^2 \ge \langle \widetilde{a}, \widetilde{a} \rangle_L \langle \widetilde{b}, \widetilde{b} \rangle_L, \tag{21}$$

这是 Lorentz–Minkowski 几何中的反向 Cauchy–Schwarz 不等式。

狭义相对论中的时空间隔

$$s^2 = t^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$$

具有同样的二次型。因而，本文中的“光锥”来自相对论所使用的几何结构；$S(a)$、$S(b)$ 在这里仅是形式上的时间坐标，a_i, b_i 也不代表具体的物理量。

5 典型例题

5.1 由 Aczél 不等式推出 Cauchy–Schwarz 不等式

例 5.1 (Cauchy–Schwarz 不等式)

题目. 设 $a_i > 0$，证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{22}$$

分析. 在 Aczél 不等式中取 $b_i = 1$。此时第二组数据的和与平方和分别为 n 和 n。

解答. 记 $A = \sum a_i$。代入 $b_i = 1$，有

$$\mathcal{B}(a, \mathbf{1}) = (n-1)A, \qquad \mathcal{Q}(\mathbf{1}) = n(n-1).$$

因此（2）给出

$$(n-1)^2 A^2 \ge \left(A^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) n(n-1).$$

除以 $n - 1 > 0$，整理得

$$A^2 \le n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

点评. 普通 Cauchy–Schwarz 不等式在这里表现为 Aczél 不等式的一个特殊取值。从形式上看，取 $b_i = 1$ 把第二个向量固定在全 1 方向。

5.2 二元交叉项不等式

例 5.2 (二元交叉项不等式)

题目. 设 $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$，证明

$$(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \ge 4 a_1 a_2 b_1 b_2. \tag{23}$$

分析. 这是 Aczél 不等式在 $n = 2$ 时的形式。也可以直接利用平方差分解。

解答.

$$\begin{aligned}(a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 - 4 a_1 a_2 b_1 b_2 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &\ge 0.\end{aligned}$$

点评. 等号成立当且仅当 $a_1 b_2 = a_2 b_1$，即

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

这与定理中的一般等号条件一致。

6　识别条件与证明步骤

Aczél 方法适用于以下结构：

$$\beta^2 \geq \alpha\gamma,$$

其中 α、γ 分别是两组数据的“和的平方减平方和”，β 是相应的交叉项。

实际使用时，按下列顺序处理：

1. 记两组数据的和为 $S(a)$、$S(b)$；

2. 令 $\Phi(x) = \mathcal{Q}(xa - b)$；

3. 展开 $\Phi(x)$，确认其系数为 $\mathcal{Q}(a)$、$-2\mathcal{B}(a,b)$、$\mathcal{Q}(b)$；

4. 取 $x = S(b)/S(a)$，使 $S(xa - b) = 0$；

5. 利用 $\Phi(x) \leq 0$ 和 $\mathcal{Q}(a) > 0$，得到判别式非负。

其中第 4 步是构造的关键：特殊值由“消去总和”这一要求唯一确定。几何表示则说明了这条代数路线的来源：沿直线 $xa - b$ 考察不定二次型，判别式记录的正是直线与零锥的相交情况。

参考资料

1. J. Aczél, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, 1966。

2. E. F. Taylor and J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*, 2nd ed., W. H. Freeman, 1992。