

初高中数学衔接教学案例二

韦达定理的“再认识”——从“求对称式的值”到“构造方程解决问题”

珠海市第一中学 康劲鹏

2026 年 7 月

案例主题	韦达定理的“再认识”——从“求对称式的值”到“构造方程解决问题”
授课内容	一元二次方程根与系数的关系（初高中衔接专题课）
授课对象	创美营初三学员 30 人（即将完成初中全部课程）
课时安排	3 课时（120 分钟）
授课时间	2026 年寒假创美营
案例类型	课堂教学案例（含教学过程实录、作业设计与教学反思）

【内容摘要】一元二次方程根与系数的关系（韦达定理）在现行初中教材中多作选学处理，而在高中尤其是解析几何中高频使用，是一处典型的初高中衔接断层。本案例以一次 3 课时（120 分钟）的专题课为载体，通过“复习诊断—配对求值—构造方程—交叉推断”四个层次的课堂活动，引导学生把韦达定理从“求对称式的值”的计算工具，升级为“由和与积构造方程、跨方程整体推断”的推理工具。案例完整呈现了三课时教学过程，并在教材选学处理的背景下对衔接策略、课堂运算落实等作了反思，与案例一共同构成课题组“工具再认识”系列课例。

【关键词】初高中衔接；韦达定理；根与系数的关系；构造方程；对称式

一、案例背景

在课题组前期的衔接教学调研中，“根与系数的关系”被高中教师反复提及：高一讲“一元二次函数、方程和不等式”时，默认学生会由根的范围反算系数；高二讲“圆锥曲线的方程”时，直线与椭圆联立之后几乎全程依赖韦达定理作整体代换（“设而不求”）。然而，《义务教育数学课程标准（2022 年版）》已将“一元二次方程的根与系数的关系”由选学（带*）调整为考查内容，但现行人教版教材仍多按选学处理，各地中考对此要求也不一致，导致初中课堂对这部分内容的教学力度参差：有的班级只背了公式，有的班级甚至没有正式学过。

这一“初中多作选学处理、高中却视为必备”的落差，使韦达定理成为初高中衔接中一处隐蔽但影响深远的断层。本案例是课题组“工具再认识”系列课例的第二课（第一课为案例一“判别式的再认识”），面向已完成初中课程的创美营初三学员，用 3 课时（120 分钟）的专题课解决

一个问题：学生对韦达定理的理解普遍停留在“求 $x_1^2 + x_2^2$ 这类对称式的值”，而高中需要的是“由和与积反造方程”“跨方程整体推断”的用法. 如何在一节课内完成这一工具观的升级？

二、教学内容分析

(一) 初中课标与教材中的定位

《义务教育数学课程标准（2022 年版）》已将“一元二次方程的根与系数的关系”由选学（带*）调整为考查内容，要求学生“了解”并能“已知方程的根求代数式的值”；但人教版九年级上册第 21 章目前仍以选学形式呈现该内容，教材通过“观察—猜想—验证”的方式得到结论 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ，配套练习以“求两根对称式的值”为主. 创美营学员虽在拓展课程中学过该内容，但使用经验基本限于 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 x_2$ 的直接代入和简单恒等变形.

(二) 高中课标与教材中的去向

在高中，韦达定理几乎不再单独出现，而是作为一种“默认技能”渗透在各处：人教 A 版必修第一册中，由一元二次方程实根的分布反算参数范围、二次函数零点问题，需要“根的范围 $\leftrightarrow$ 系数的范围”的双向意识；选择性必修第一册“圆锥曲线的方程”中，直线与椭圆、双曲线、抛物线联立后，弦长、弦中点、斜率之和、定点定值等问题，都靠“设而不求、整体代入”完成，其代数内核正是韦达定理；在高中竞赛与强基计划测试中，构造方程、整数根分析等更是高频考点.

(三) 衔接点的确定

梳理韦达定理的用法，可以排出四个层次：

1. **顺用**：已知方程，求两根对称式的值（初中已会）；
2. **活用**：求非对称式的值——通过“对调两根”配出伴侣式，转化为对称式处理（技巧层）；
3. **逆用**：已知两数之和与之积，反向构造以它们为根的一元二次方程（视角反转）；
4. **交叉使用**：在多个方程之间，用“根与系数”作桥梁整体联立、对照推断（高中雏形）.

其中第一层学生已经掌握，后三层正是初高中之间的落差所在. 本课按这四个层次组织问题链，衔接主线确定为：

方程 $\rightarrow$ 根（初中）； 根的关系 $\rightarrow$ 构造方程（高中）.

三、学情分析

授课对象为创美营初三学员 30 人，基本完成初中全部课程，运算能力较强，多数人有初中竞赛的初步训练.

课前前测与访谈了解到：

1. 学生能熟练写出 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 x_2$ ，会用恒等变形求 $x_1^2 + x_2^2$ 、 $x_1^3 + x_2^3$ 等基本对称式的值；

2. 遇到 $x_1^2 + 2x_2$ 这类非对称式时，多数学生的第一反应是“先求出根再代入”，缺乏整体处理的意识；
3. 学生知道“韦达定理是由方程得到根的关系”，但几乎没有“由根的关系反造方程”的经历，逆用意识空白；
4. 学生在单个方程内使用韦达定理尚属顺利，但没有在两个及以上方程之间交叉使用的经验。

据此预判本课的学习障碍：一是“非对称式不会处理”，二是“想不到逆用”，三是“跨方程不会联立”。教学对策：环节二用“配对”把非对称式对称化；环节三以“互为倒数的两数”为识别信号引出构造；环节四用“系数互换身份”的两个方程制造交叉使用的需求。

四、教学目标

1. 熟练运用韦达定理求两根对称式的值，掌握用“配对对称化”求非对称式值的方法；
2. 理解并初步掌握韦达定理的逆用：由两数之和与之积构造一元二次方程，并能识别适用该方法的题目特征（和与积同时确定）；
3. 经历在两个方程之间交叉使用根与系数关系的完整过程，体会“设而不求、整体推断”的思想；
4. 了解韦达定理在高中（特别是解析几何）中的用途，形成对高中学习的合理预期。

本课承载的数学学科核心素养主要是逻辑推理、数学运算与数学抽象。

五、教学重点与难点

教学重点：韦达定理的逆用——由和与积构造一元二次方程。

教学难点：（1）配对对称化中伴侣式的构造与 $A+B$ 、 $A-B$ 的运算落实；（2）跨方程交叉使用时“把全体方程的根看成一个集合”的整体观点。

突破策略：环节一的诊断题中预设 $s-t$ 的计算，为环节二 $A-B$ 中隐含因子 $t-s$ 作伏笔；环节三先观察“两数互为倒数”的结构再设元构造；环节四教师给出“把所有方程的根加在一起”的关键提示，把整体观点显性化。

六、教学方法与教学准备

教学方法：问题驱动、层次递进的变式教学、小组合作探究与教师讲授相结合。

教学准备：PPT 课件、课堂学案（含前测与探究留白）。

七、教学过程

本课分 3 课时进行，每课时 40 分钟。三课时的设计意图依次是：第 1 课时完成“顺用”的复习诊断与“配对对称化”的活用，让学生会把非对称式整体处理；第 2 课时实现韦达定理的

“逆用”，建立“由和与积构造方程”的视角；第3课时进入“跨方程交叉使用”，并以作业讲评承上启下，衔接展望、布置分层作业.

第1课时 顺用复习与配对对称化

本课时目标：复习巩固“对称式化基本对称式”，突破“非对称式如何整体处理”这一障碍，建立配对对称化的方法. 重点：非对称式配上配偶式后 $A+B$ 对称、 $A-B$ 含因子 $s-t$ 的处理.

环节一 复习诊断：顺用韦达定理（约8分钟）

问题1 (复习诊断)

设 s, t 是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根，且 $s > t$. 不解方程，求：(1) $s^2 + t^2$ ；(2) $s - t$ ；(3) $s^3 + t^3$.

【学生活动】学生口答 (1)：由韦达定理， $s + t = 6$ ， $st = 7$ ，故

$$s^2 + t^2 = (s + t)^2 - 2st = 36 - 14 = 22.$$

笔答 (2)：由 $(s - t)^2 = (s + t)^2 - 4st = 36 - 28 = 8$ 及 $s > t$ ，得 $s - t = 2\sqrt{2}$.

口答 (3)：由 $s^3 + t^3 = (s + t)^3 - 3st(s + t) = 216 - 126 = 90$.

教师追问第(2)问：“为什么 $s - t$ 也能用对称式表示？它本身并不对称。”学生答： $(s - t)^2$ 是对称的，所以平方之后可以用 $s + t$ 和 st 表示，再开方回来.

【设计意图】一是诊断并巩固“对称式化基本对称式”的基本功；二是第(2)问算出的 $s - t = 2\sqrt{2}$ 正是环节二求 $A - B$ 时必需的因子，此处先算好，后面直接调用；三是借教师追问点破“平方之后变对称”这一关键，为环节二的配对思想作铺垫.

环节二 探究一：非对称式怎么办——配对对称化（约26分钟）

问题2 (探究一)

设 s, t 是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根，且 $s > t$. 不解方程，求 $\frac{2}{s} + 3t^2$ 的值.

【课堂实况】学生沿用环节一的思路尝试把 $\frac{2}{s} + 3t^2$ 向 $s + t$ 与 st 化归，很快发现：式子中 s 和 t 的地位不一样，怎么变形都无法只用 $s + t$ 和 st 表示. 多数学生转而求出两根 $s = 3 + \sqrt{2}$ ， $t = 3 - \sqrt{2}$ 准备硬代. 教师并不阻止，而是同时请一名学生板演硬代过程，让全班感受运算量，再提出问题：

【师生对话】

师：式子对 s, t 不对称，韦达定理就用不上了吗？想一想：如果把 s, t 对调，会得到一个什么式子？

生3： $\frac{2}{t} + 3s^2$.

师：好. 把原式记作 $A = \frac{2}{s} + 3t^2$ ，对调得到的记作 $B = \frac{2}{t} + 3s^2$. A 虽然不对称，但 $A + B$ 和 $A - B$ 呢？

生4： $A + B$ 对称了！ $A - B$ ……里面能提出 $t - s$ ，而 $t - s$ 环节一算过.

学生分组完成计算：

$$A + B = \frac{2(s+t)}{st} + 3(s^2 + t^2) = \frac{2 \times 6}{7} + 3 \times 22 = \frac{474}{7},$$

$$A - B = \frac{2(t-s)}{st} + 3(t^2 - s^2) = (t-s) \left[\frac{2}{st} + 3(s+t) \right] = -2\sqrt{2} \left(\frac{2}{7} + 18 \right) = -\frac{256\sqrt{2}}{7}.$$

于是

$$A = \frac{(A+B) + (A-B)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{474}{7} - \frac{256\sqrt{2}}{7} \right) = \frac{237 - 128\sqrt{2}}{7}.$$

教师请板演硬代的学生报告结果，两种方法答案一致，全班比较运算量，直观体会“整体处理”的价值。

【设计意图】本环节要让学生明白：韦达定理的适用对象不是“对称式”这个标签，而是“能化归为 $s+t$ 与 st 的式子”。任何关于 s, t 的式子，配上对调的伴侣式之后， $A+B$ 对称、 $A-B$ 含因子 $s-t$ ，而 $s-t$ 又可由 $(s+t)^2 - 4st$ 开方得到，于是非对称式整体可解。这一“配对”思想在高中（如对称多项式、轮换式求值、解析几何中的斜率之和与之差）会反复出现。允许学生先硬代再比较，是为了让“整体处理”的优越性成为学生的亲身感受，而非教师的口头说教。

课堂巩固练习

练习

设 s, t 是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根，且 $s > t$ 。不解方程，求 $s + 2t^2$ 的值。

学生独立完成：记 $A = s + 2t^2$ ，对调得配偶式 $B = t + 2s^2$ 。则

$$A + B = (s+t) + 2(s^2 + t^2) = 6 + 44 = 50,$$

$$A - B = (s-t) + 2(t^2 - s^2) = (s-t)[1 - 2(s+t)] = 2\sqrt{2} \times (1 - 12) = -22\sqrt{2},$$

故 $A = \frac{(A+B) + (A-B)}{2} = \frac{50 - 22\sqrt{2}}{2} = 25 - 11\sqrt{2}$ 。教师提示：本例 $A-B$ 提取的是因子 $s-t$ （由 $s > t$ 取正号），与环节二中 $A-B$ 提取 $t-s$ （取负号）相对，须按 s, t 的大小关系确定符号，这是配对法最常见的失分点。

第 1 课时小结

教师归纳“配对对称化”四步：识别非对称 $\rightarrow$ 对调得配偶式 $\rightarrow$ 和差分离（ $A+B$ 对称、 $A-B$ 含因子 $s-t$ ） $\rightarrow$ 解出 A 。指出“配方得 $(s-t)^2$ 、再由 $s > t$ 定号”是两处易错点，并预告下节课进入韦达定理的“逆用”——方程不再是题目给的，而是可以造出来的工具。

第 2 课时 逆用——构造方程

本课时目标：实现韦达定理的“逆用”，由两数之和与之积构造一元二次方程，体会“方程可被制造”的视角反转，并能识别“和与积同时确定”的题目信号。

环节三 探究二：韦达定理的逆用——构造方程（约 30 分钟）

问题 3 (探究二)

解方程 $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$.

【课堂实况】学生初见此题的反应是“指数方程没学过”，有学生尝试验根 $x = 1$ 并发现成立，但无法说明是否还有其他解. 教师肯定验根的价值，同时引导全班观察结构.

【师生对话】

师：先看两个底数， $2 + \sqrt{3}$ 与 $2 - \sqrt{3}$ 之间有什么特殊关系？

生 5：乘积是 1，互为倒数.

师：把 $(2 + \sqrt{3})^x$ 记作 a ， $(2 - \sqrt{3})^x$ 记作 b . a 和 b 之间有哪些确定的关系？

生 6： $a + b = 4$ ； $ab = [(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})]^x = 1^x = 1$.

师：知道两个数的和与积，能确定什么？

生 7：它们是某个一元二次方程的两根—— $z^2 - 4z + 1 = 0$.

师：依据是什么？

生 7：韦达定理倒过来用.

教师板书：由 $a + b = 4$ ， $ab = 1$ 知， a, b 是方程 $z^2 - 4z + 1 = 0$ 的两根. 解得 $z = 2 \pm \sqrt{3}$.

【师生对话】（回代与检验）

师：于是 $a = (2 + \sqrt{3})^x = 2 + \sqrt{3}$ 或 $2 - \sqrt{3}$ ，对应的 x 是多少？

生 8： $x = 1$ ，或者 $x = -1$ （因为 $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ ）.

师：两个解都要吗？代回原方程检验一下.

生 9： $x = 1$ 时，原式 $= (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$ ； $x = -1$ 时，原式 $= (2 - \sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3}) = 4$. 都成立，所以 $x = \pm 1$.

教师在黑板右侧写下本课主线：“初中：方程 $\rightarrow$ 根；高中：根的关系 $\rightarrow$ 构造方程.”

方法提炼（“构造方程法”的识别信号与操作步骤） 1. **识别**：题中出现两个量，它们的**和**与**积**同时确定（或同时可用同一参数表示），常见结构如“两数互为倒数”“共轭根式”等；

2. **构造**：设这两个量为 a, b ，由韦达定理的逆用，它们是一元二次方程 $z^2 - (a+b)z + ab = 0$ 的两根；

3. **求解**：解这个二次方程，得到 a, b 的所有可能值；

4. **回代检验**：把 a, b 代回原来的等量关系求出未知数，并检验是否满足原题条件.

【设计意图】本环节实现韦达定理的“逆用”，是全课的视角反转点. 学生原有的图式是“先有方程、后有根的关系”，本环节让他们经历“先有根的关系、后造方程”的反向过程——方程从“题目给定的对象”变成“可以制造的工具”，这与案例一中“构造二次函数”同属构造思想，两个案例互为呼应. 设置“回代检验”的追问，是因为逆用韦达定理得到的是 a, b 的所有可能值，还需回到指数运算的对应关系（底数大于 1 时的单调性）确定 x ，借此强化“等价变形、步步有据”的意识，这正是高中数学对推理规范的基本要求.

环节四 探究三：跨方程的交叉使用（约 9 分钟）

问题 4 (探究三)

设方程 $x^2 - px + q = 0$ 与 $x^2 - qx + p = 0$ 的根都是正整数，求正整数 p, q .

【学生活动】学生独立探究约 4 分钟. 多数学生能写出四个关系式：设第一个方程的两根为 x_1, x_2 ，第二个方程的两根为 x_3, x_4 ，则

$$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 x_2 = q, \quad x_3 + x_4 = q, \quad x_3 x_4 = p.$$

随后普遍停在“式子太多、不知联立哪个”的状态. 教师提示：注意 p, q 在两个方程中互换了身份——在第一个方程里 p 是“和”、 q 是“积”，在第二个方程里恰好反过来. 由此得到

$$x_1 + x_2 = x_3 x_4, \quad x_1 x_2 = x_3 + x_4.$$

【师生对话】

师：一边是“和等于积”，另一边是“积等于和”. 处理整数问题，有一个常用的变形能把和与积连起来： $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ 展开是什么？

生 10： $x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1$.

师：把上面两式代进去呢？

生 10： $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_3 + x_4 - x_3 x_4 + 1 = 2 - (x_3 - 1)(x_4 - 1)$ ，所以

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_3 - 1)(x_4 - 1) = 2.$$

由于根都是正整数， $(x_1 - 1)(x_2 - 1)$ 与 $(x_3 - 1)(x_4 - 1)$ 都是非负整数，故只有 $1 + 1$ 、 $2 + 0$ 、 $0 + 2$ 三种情形：

- (i) $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = (x_3 - 1)(x_4 - 1) = 1$ ：得 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ ，于是 $p = 4$ ， $q = 4$ ；
- (ii) $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2$ ， $(x_3 - 1)(x_4 - 1) = 0$ ：得 $\{x_1, x_2\} = \{2, 3\}$ ，于是 $p = 5$ ， $q = 6$ ；再由 $(x_3 - 1)(x_4 - 1) = 0$ 不妨取 $x_3 = 1$ ，由 $x_3 x_4 = p = 5$ 得 $x_4 = 5$ ，检验 $x_3 + x_4 = 6 = q$ ，成立；
- (iii) 与 (ii) 对称，得 $p = 6$ ， $q = 5$.

综上， $(p, q) = (4, 4)$ ， $(5, 6)$ ， $(6, 5)$.

【设计意图】本环节让学生经历“跨方程交叉使用韦达定理”：四个关系式分属两个方程，只有把“和”与“积”对照起来才能产生新信息，而“ $(x_i - 1)(x_j - 1)$ 展开”这一处理整数根问题的经典变形也在此自然登场. 这种“以根与系数为桥梁、在多个对象之间整体推断”的思维方式，正是高中解析几何“设而不求”的代数雏形. 题目结论的三组解也提醒学生：分类讨论务必穷尽、每类都要回代检验.

环节五 课堂小结，衔接展望（约 3 分钟）

教师引导学生回顾韦达定理的四层用法——顺用求对称式、活用配对化非对称、逆用构造方程、交叉使用跨方程联立，并补充一段“衔接展望”：到了高中解析几何，直线与椭圆联立会得到一个关于 x 的一元二次方程，两个交点的横坐标就是它的两根；而弦的中点、弦长、斜率之和这些问题，几乎从来不需要把根求出来，全靠韦达定理整体代换完成，这就是高中常说的“设而不求”。今天学的四层用法，到那时会全部派上用场。

环节六 分层作业布置（约 2 分钟）

布置分层作业（见第九部分）：A 组人人必做，B 组原则上必做，C 组供学有余力的学生选做。

八、板书设计

韦达定理的“再认识”		
左栏：基本公式	中栏：探究演算区	右栏：用法层级
$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1x_2 = \frac{c}{a}$ 诊断： $s + t = 6, st = 7,$ $s - t = 2\sqrt{2}$ 主线：方程 $\rightarrow$ 根（初中）； 根的关系 $\rightarrow$ 构造方程（高中）	探究一： $A + B = \frac{474}{7}, A - B = -\frac{256\sqrt{2}}{7} \Rightarrow A = \frac{237 - 128\sqrt{2}}{7}$ 探究二： $a + b = 4, ab = 1 \Rightarrow z^2 - 4z + 1 = 0 \Rightarrow z = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \pm 1$ 探究三： $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + (x_3 - 1)(x_4 - 1) = 2$	一、顺用：求对称式 二、活用：配对化非对称 三、逆用：和积定 $\Rightarrow$ 构造方程 四、交叉：多方程整体联立 高中预告：解析几何“设而不求”

九、作业设计

A 组（基础巩固，人人必做）

问题 5

设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根，不解方程，求：(1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ；(2) $x_1^3 + x_2^3$.

问题 6

设 s, t 是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 的两根，不解方程，求 $(s - 2)(t - 2)$ 的值.

设计说明：A 组对应“顺用”层次，巩固“对称式化基本对称式”的基本功，其中问题 6 需展开后同时使用和与积，是向“整体代入”的过渡。

B 组（能力提升，原则上必做）

问题 7

不解方程，求作一个一元二次方程，使它的两根分别是方程 $x^2 - 6x + 7 = 0$ 两根的倒数.

问题 8

解方程 $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 2\sqrt{2}$.

设计说明：问题 7 是“由旧方程造新方程”，是逆用与顺用的结合；问题 8 与课内探究二同构，识别信号仍是“两底数互为倒数”，考查构造方程法的迁移.

C 组（衔接拓展，选做）**问题 9**

给定 $n > 1$ 个二次三项式 $x^2 - a_1x + b_1, x^2 - a_2x + b_2, \dots, x^2 - a_nx + b_n$ ，其中 $2n$ 个实数 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ 互不相同. 试问：是否可能这 $2n$ 个数恰好分别是这 n 个多项式的根（即每个多项式的两个根都取自这 $2n$ 个数，且 $2n$ 个根互不相同）？说明理由.

设计说明：问题 9 是“交叉使用”的进一步强化：需要把 n 个方程的全体根看成一个集合，分别用两种方式计算全体根的和与平方和，推出矛盾. 供学有余力的学生课后探究，教师在下次活动课上组织讲评. 另留一道口头思考题：若把探究三中“根都是正整数”改为“根都是整数”， (p, q) 的取值会怎样变化？

十、教学反思

（一）目标达成情况

四个环节预设的障碍都在课堂上真实出现：环节二中绝大多数学生第一反应是硬代求根，说明“整体处理”意识确实薄弱；环节三中有学生验出 $x = 1$ 便以为大功告成，经“还有没有其他解”的追问才补全 $x = -1$ ，回代检验的意识得到强化；环节四学生写出四个关系式后不知如何联立，说明“交叉使用”确实是全新的经验，教师关于“ p, q 互换身份”的提示起到了关键作用. 从作业反馈看，A 组、B 组完成质量较好，问题 8 的识别与构造明显比课内熟练，说明“和积同时确定”的识别信号已被多数学生接受.

（二）不足与改进

一是运算落实仍显吃力. 环节二中 $A - B$ 的计算，全班有近三分之一的学生在通分或提取 $t - s$ 时出错，最后的数值结果正确率不算高. 这提醒我们：衔接不只是思维与方法的衔接，也包括运算能力的衔接. 后续应在学案中为 $A + B$ 、 $A - B$ 分步留白，让学生分步落实，必要时安排专项的代数运算微练习.

二是环节三的“唯一性”讨论展开不够. 由 $a = 2 - \sqrt{3}$ 得 $x = -1$ ，依赖“底数大于 1 时指数函数单调”的直观，初三学生只能默认，教师点到为止. 这一处理对本课目标是合适的，但应在学案中注明“严格的单调性证明将在高中学习”，避免学生形成“验根就是全部”的误解.

三是时间弹性不足. 探究三难度较高, 若班级状态欠佳, 9 分钟难以完成. 下次教学可将探究三设为弹性环节: 课内只写到四个关系式与“和积互换”的发现, 完整的分类讨论留到作业讲评课完成.

（三）对课题研究的启示

韦达定理这类“初中多作选学处理、高中却视为必备”的内容, 衔接教学的首要任务不是补知识, 而是补“用法的层次”: 学生会顺用, 不代表会逆用; 会单方程使用, 不代表会跨方程推断. 衔接课应当沿着“顺用—活用—逆用—交叉用”的阶梯逐层铺设, 每一层都配以可识别的题目信号(如“互为倒数”“和积同时确定”), 让学生带着“信号—方法”的对应进入高中. 这一点与案例一“信号—构造—结论—检查”的方法提炼一脉相承.

十一、案例评析（课题组评议）

本案例直面一处常被忽视的衔接断层: 韦达定理在现行初中教材中多作选学处理, 而高中课堂默认学生熟练使用. 课例没有把衔接课上成“补漏课”或“复习课”, 而是以四层用法为主线重构了学生对这一工具的认识, 立意是准确的.

课例设计上有三个值得肯定的处理. 其一, 环节一求 $s-t$ 看似寻常热身, 实为环节二 $A-B$ 的伏笔, 前后呼应, 体现了问题链的整体设计; 其二, 环节二允许学生先硬代、再与配对法对照, 让“整体处理”的优越性成为学生的亲身体验, 而非灌输的结论; 其三, 环节四以“ p, q 互换身份”为观察点, 把“交叉使用”这一高中思维的萌芽落到具体的代数变形 $((x_i-1)(x_j-1))$ 的展开) 上, 避免了空泛的“思想渗透”.

与案例一并读, 两个案例共同体现了课题组衔接课开发的基本模式: 选取“初高中共用、用法不同”的工具点, 以“再认识”重构工具观, 以“信号—方法”对应保障可迁移性. 建议课题组后续为两个案例补充前后测与访谈数据, 并跟踪这批学员进入高一后在“一元二次函数、方程和不等式”单元的学习表现, 用纵向证据检验衔接课的实际效果.

需要指出的是, 探究三与作业问题 9 的难度已接近初中竞赛水平, 是否适合所有衔接对象, 应根据学情分层实施; 对普通班级, 可将本课压缩为前三个环节, 把交叉使用的内容移至高中开学后的适应性课程中.

附录：作业参考答案与简析

问题 5 (A 组)

简析. 由韦达定理, $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 x_2 = 1$.

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$(2) x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 27 - 3 \times 1 \times 3 = 18. \quad \square$$

问题 6 (A 组)

简析. 由韦达定理, $s + t = 6$, $st = 7$, 故

$$(s-2)(t-2) = st - 2(s+t) + 4 = 7 - 12 + 4 = -1.$$

□

问题 7 (B 组)

简析. 设原方程两根为 s, t , 则 $s + t = 6$, $st = 7$. 新方程两根为 $\frac{1}{s}, \frac{1}{t}$, 而

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{t} = \frac{s+t}{st} = \frac{6}{7}, \quad \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{st} = \frac{1}{7}.$$

由韦达定理的逆用, 所求方程为 $y^2 - \frac{6}{7}y + \frac{1}{7} = 0$, 即 $7y^2 - 6y + 1 = 0$. □

问题 8 (B 组)

简析. 注意 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$. 设 $a = (\sqrt{2}+1)^x$, $b = (\sqrt{2}-1)^x$, 则

$$ab = [(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)]^x = 1, \quad a+b = 2\sqrt{2}.$$

由韦达定理的逆用, a, b 是方程 $z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0$ 的两根, 解得 $z = \sqrt{2} \pm 1$. 若 $(\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}+1$, 则 $x = 1$; 若 $(\sqrt{2}+1)^x = \sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, 则 $x = -1$. 经检验, $x = \pm 1$ 都是原方程的解. □

问题 9 (C 组)

简析. 不可能. 假设可能, 设 $x^2 - a_i x + b_i = 0$ 的两根为 α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$). 由韦达定理,

$$\alpha_i + \beta_i = a_i, \quad \alpha_i \beta_i = b_i.$$

由题设, 全体根 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^n$ 恰好就是 $\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$ 这 $2n$ 个数. 一方面, 全体根之和为

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^n a_i;$$

另一方面, 它又等于 $\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)$, 故 $\sum_{i=1}^n b_i = 0$.

再算全体根的平方和: 一方面,

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i^2 + \beta_i^2) = \sum_{i=1}^n [(\alpha_i + \beta_i)^2 - 2\alpha_i \beta_i] = \sum_{i=1}^n (a_i^2 - 2b_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2;$$

另一方面, 它又等于 $\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2)$, 故 $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$, 于是 $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, 这与“ $2n$ 个数互不相同”矛盾. 所以不可能. □

执笔: 康劲鹏; 课例实施: 2026 年寒假创美营; 案例整理: 2026 年 7 月.