

初高中数学衔接教学案例一

判别式的“再认识”——从“判断实根个数”到“证明不等式”

珠海市第一中学 康劲鹏

2026 年 7 月

案例主题	根的判别式的“再认识”：从判根到判号、判恒成立
授课内容	一元二次方程根的判别式（初高中衔接专题课）
授课对象	创美营初三学员 30 人（即将完成初中全部课程）
课时安排	3 课时（120 分钟）
授课时间	2026 年寒假创美营
案例类型	课堂教学案例（含教学过程实录、作业设计与教学反思）

【内容摘要】本案例以“根的判别式”为载体，执教于创美营初三寒假课程。课例通过“前置诊断—核心探究—变式迁移”三个层次的问题链，引导学生经历从“用判别式判断实根个数”到“用判别式判定二次式的符号、处理恒成立问题”的视角转换，课堂上完整完成了柯西不等式的判别式法证明和一道含参恒成立问题。案例呈现了 3 课时（120 分钟）的教学过程，并对衔接点的选取、课堂生成的处理和分层作业的设计作了分析，可供初高中衔接专题教学参考。

【关键词】初高中衔接；根的判别式；柯西不等式；恒成立；构造思想

一、案例背景

初高中数学教学中长期存在一个断层：学生进入高一年后，在“一元二次函数、方程和不等式”单元的学习中普遍表现出三个不适应——不习惯含参数的讨论，不理解“恒成立”这类全称表述，想不到自己构造函数（方程）去解决问题。课题组在前期的听评课与问卷调研中发现，造成断层的重要原因之一，是初中阶段一些核心工具（如根的判别式、根与系数的关系、配方法）的教学停留在“算”的层面，工具的“用法观”没有及时升级，学生手里有工具，却不知道工具还能怎么用。

本案例是课题组“工具再认识”系列课例的第一课，以判别式为载体。判别式在初高中教材中都出现，可用法几乎相反：初中由系数算出 Δ ，判断方程有没有实根、实根是否相等；高中却把这套关系倒过来用——由二次式恒非负反推 $\Delta \leq 0$ 处理恒成立，解析几何里又用它看直线和圆锥曲线有几个公共点。同一个 Δ ，初中顺用、高中逆用，工具不变而方向相反，正适合作为衔接的切入点。

本课立足初中已有知识,避免把高中内容提前下放,转通过重新设计的问题,让学生自己把判别式用出新的功能,完成工具观的升级.这与课题组对衔接课的基本判断一致:衔接课要接的,是工具的用法观与思维方式.

二、教学内容分析

(一) 初中课标与教材中的定位

《义务教育数学课程标准(2022年版)》要求学生“会用一元二次方程根的判别式判别方程是否有实根及两个实根是否相等”.在人教版九年级上册教材中,判别式紧随求根公式出现,功能是判断实根个数,配套习题主要是“判别根的情况”和“由根的情况求字母的取值范围”两类.学生经过训练后,对“ $\Delta > 0$ 、 $\Delta = 0$ 、 $\Delta < 0$ ”三种情形与根的对应关系十分熟练,但这种熟练也容易把判别式的功能固化在“判根”一件事上.

(二) 高中课标与教材中的去向

《普通高中数学课程标准(2017年版2025年修订)》在必修课程中安排“从函数观点看一元二次方程和一元二次不等式”,要求学生借助二次函数的图象理解方程、不等式与函数三者之间的联系.在人教A版必修第一册第二章“一元二次函数、方程和不等式”中,判别式不再以“判根”的面貌单独出现,而是隐含在“二次函数图象与 x 轴的位置关系”之中,服务于三类问题:一元二次不等式的求解、含参数不等式的恒成立问题、函数零点(方程实根)的分布问题.到选择性必修第一册“圆锥曲线的方程”,判别式又成为判断直线与圆锥曲线公共点个数的基本工具.此外,在高中数学竞赛和高校强基计划测试中,用判别式证明柯西不等式、处理最值问题也是常用方法.

(三) 衔接点的确定

比较初高中对判别式的使用可以看到:初中用判别式是“由系数到根”——根据系数算出的 Δ 判断根是否存在;高中处理恒成立问题时是“由符号到系数”——由“二次式恒非负”反推“ $\Delta \leq 0$ ”,从而获得系数之间的不等关系.推理方向恰好相反,工具却是同一个.据此确定本课的衔接主线:

判根(初中) $\longrightarrow$ 判号(高中) $\longrightarrow$ 判恒成立(高中).

围绕这条主线,本课选取三个问题组成问题链:前置问题让学生初次体验“判别式可以不落在‘求根’上,而作为代数式整体参与推理”;核心问题(柯西不等式的判别式证法)让学生经历“构造二次式—由恒非负得 $\Delta \leq 0$ ”的完整过程;变式问题(含参恒成立)训练“先看二次项系数”的分类讨论意识.

三、学情分析

授课对象为创美营初三学员30人,基本完成初中全部课程,多数人有初中竞赛的初步训练,运算能力较强,课堂表达积极.

课前通过学案前测(5道小题)和个别访谈了解到以下情况:

1. 全体学生都能熟练说出 Δ 与根的三种对应关系，会用“ $\Delta \geq 0$ ”求方程中字母的取值范围；
2. 约八成学生能借助图象说明“当 $a > 0$ 且 $\Delta < 0$ 时，二次三项式的值恒为正”，但只有个别学生意识到这是一个可以主动使用的结论；
3. 面对前测中“证明两个方程至少有一个有实根”的问题，学生普遍试图分别判断两个判别式的符号，没有人主动把两个判别式相加作整体处理；
4. 学生没有“自己构造一个方程或函数来解题”的经历，普遍认为方程和函数都是题目给定的对象，而不是可以制造的工具.

据此预判本课的三大学习障碍：一是对判别式的功能认识固化，认为 Δ 只能“判根”；二是构造意识薄弱，面对柯西不等式这样的陌生命题不知道从何入手；三是含参讨论中容易忽略“二次项系数是否为零”这一前提. 针对这三点，教学中采取“问题链搭梯、先退后进、错误资源化”的对策，具体见教学过程.

四、教学目标

1. 理解“ $ax^2 + bx + c \geq 0$ ($a \neq 0$) 对一切实数 x 恒成立，当且仅当 $a > 0$ 且 $\Delta \leq 0$ ”，并能用它解决简单的恒成立问题；
2. 了解柯西不等式，经历用构造二次函数的方法证明它的完整过程，体会“由恒成立反推判别式”的反向思维；
3. 通过含参恒成立问题，形成“先看二次项系数是否为零”的分类讨论意识；
4. 在“熟悉工具的新用法”中感受数学知识的生长，初步消除对高中学习的陌生感和畏难情绪.

本课承载的数学学科核心素养主要是数学抽象、逻辑推理与数学运算.

五、教学重点与难点

教学重点：“二次式恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$ ”这一反向结论的理解与运用.

教学难点：(1) 构造 $f(t) = \sum_{i=1}^n (a_i t + b_i)^2$ 的动机生成——为什么要造、怎样造；(2) 含参恒成立问题中“先看二次项系数”的分类讨论意识.

突破策略：以问题 1 作“整体使用判别式”的预热；对问题 2 先退到 $n = 2$ 观察结构，再引入主元 t 完成一般化；对问题 3 放手让学生暴露典型错误，再将错误转化为讨论分类标准的教学资源.

六、教学方法与教学准备

教学方法：问题驱动、变式教学、小组合作探究与教师讲授相结合.

教学准备：PPT 课件、课堂学案（含前测与课中探究留白）.

七、教学过程

本课分 3 课时进行, 每课时 40 分钟. 三课时的设计意图依次是: 第 1 课时激活“判根”经验并让学生初体验判别式的“整体使用”; 第 2 课时进入核心探究, 引导学生构造二次式以反向调用第 1 课时板书的种子句, 用“恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$ ”证明柯西不等式; 第 3 课时把结论放进含参情境, 在错误暴露与纠正中建立分类讨论意识, 并完成课堂小结与分层作业.

第 1 课时 判根的复习与判别式的“整体使用”

本课时目标: 复习 Δ 与根的关系, 把“判根”与“判号”两个视角并置; 通过一道预置题让学生初次体验判别式可以不落实在“求根”上, 而作为代数式整体参与运算. 重点: 松动“ Δ 只能判根”的固化认识.

环节一 复习回顾, 激活“判根”经验 (约 8 分钟)

【师生对话】

师: 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 能告诉我们什么?

生 1: $\Delta > 0$ 时有两个不相等的实根, $\Delta = 0$ 时有两个相等的实根, $\Delta < 0$ 时没有实根.

师: 如果 $\Delta < 0$, 从二次函数的图象看, 又意味着什么?

生 2: 抛物线与 x 轴没有交点. 当 $a > 0$ 时, 整条抛物线都在 x 轴上方, 也就是 $ax^2 + bx + c > 0$ 对一切 x 恒成立.

教师把生 2 的回答写在黑板左侧: “ $a > 0$ 且 $\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立”, 并告诉学生: 这句话大家都会说, 但今天这节课要让它“反过来干活”.

【设计意图】从学生最熟悉的结论出发, 把“判根”与“判号”两个视角并置. 生 2 的回答是本课的逻辑种子: 环节三构造出恒非负的二次式之后, 正是要调用这句话的反向形式得出 $\Delta \leq 0$. 先把它写在黑板上, 后面用到时再指回去, 让学生感到结论是“自己长出来的”, 不是教师空降的.

环节二 前置诊断: 判别式可以“整体使用” (约 18 分钟)

问题 1 (前置诊断)

设关于 x 的方程 $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ 与 $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ 满足 $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. 求证: 这两个方程中至少有一个方程有实数根.

【学生活动】学生独立尝试约 3 分钟. 与前测一致, 绝大多数学生分别算出 $\Delta_1 = p_1^2 - 4q_1$ 和 $\Delta_2 = p_2^2 - 4q_2$, 然后试图说明“至少有一个非负”, 但无法直接下结论, 出现第一次卡壳.

【师生对话】

师：要证“至少有一个 Δ 非负”，直接看看不出来. 这句话的反面是什么？

生 3：反面是“两个都小于 0”. 可以用反证法——如果两个都小于 0，那么它们的和也小于 0.

师：好，那就算算 $\Delta_1 + \Delta_2$ ，再看条件 $p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$ 能告诉我们什么.

学生完成计算：

$$\Delta_1 + \Delta_2 = (p_1^2 - 4q_1) + (p_2^2 - 4q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 4(q_1 + q_2) = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0,$$

这与“ $\Delta_1 + \Delta_2 < 0$ ”矛盾，所以 Δ_1, Δ_2 中至少有一个非负，即至少有一个方程有实数根.

【教师点拨】 这道题我们始终没有求出任何一个根，甚至没有分别判断每一个方程，而是把两个判别式“打包”相加，借助配方得出结论. 可见判别式不只是“判根的信号”，它本身就是一个可以参与运算、变形和推理的代数式.

【设计意图】 这是本课第一次松动“ Δ 等于判根”的固化认识，让学生体验判别式的“整体使用”：不求根、不逐个判断，照样能完成关于根的推理. 同时， $\Delta_1 + \Delta_2$ 配方成完全平方的代数处理，为环节三中柯西不等式证明所需的代数变形作了预热；“至少有一个”的否定形式训练，也是高中数学中常用的表述方式.

课堂巩固练习

练习

判断下列各式是否对一切实数 x 恒正，并说明理由：(1) $x^2 - 4x + 5$ ；(2) $2x^2 - 3x + 1$ ；(3) $-x^2 + 6x - 10$.

学生独立判断后在小组内交流，教师抽问并点评：(1) $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ ，开口向上，恒正；(2) $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ ，有实根，不恒正；(3) 开口向下且 $\Delta = 36 - 40 = -4 < 0$ ，故恒负，不恒正. 点评要点：判断前先看开口方向，再看 Δ ，二者要“配套”——这正是第 1 课时板书种子句的两个半边，为下节课“反过来用”作准备.

第 1 课时小结

教师归纳：本课时做了两件事——把“判根”的 Δ 与“判号”的 Δ 并置（种子句“ $a > 0$ 且 $\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立”留写在黑板左侧，下节课反向调用）；又用 $\Delta_1 + \Delta_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0$ 一例让学生看到判别式可以“整体使用”，不必求根也能完成关于根的推理. 预告下节课要让这句话“反过来干活”——由恒非负反推 $\Delta \leq 0$.

第 2 课时 核心探究：柯西不等式的判别式证法

本课时目标：引导学生构造以 t 为主元的恒非负二次式 $f(t) = \sum (a_i t + b_i)^2$ ，反向调用第 1 课时板书的种子句，完成柯西不等式的证明，并提炼“识别—构造—结论—检查”四步. 重点：构造的动机生成与 n 元符号的处理；策略上先退到 $n = 2$ 观察结构，再回到一般 n .

环节三 核心探究：柯西不等式的判别式证法（约 30 分钟）

问题 2 (核心探究)

设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 都是实数，求证

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

教师有意隐去“柯西不等式”的标题，只给出命题，学生四人一组探究约 5 分钟。

【课堂实况】各组的尝试大致有三类：一是数学归纳法，卡在从 n 到 $n+1$ 的放缩；二是作差配方，项数一多就进行不下去；三是有两个组先验证了 $n=2$ 的情形：

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \geq 0.$$

教师肯定了 $n=2$ 的配方，同时指出： $n \geq 3$ 时作差配方的项数急剧增加，虽然原则上可行，但很繁琐；我们需要找一个对任意 n 都管用的、有统摄力的办法。

【师生对话】（脚手架搭建）

师：再看结论的形状。左边是“平方和”乘“平方和”，右边是“乘积和”的平方。如果把三个和分别记成 A 、 C 、 B ，结论就是 $B^2 \leq AC$ ，也就是 $(2B)^2 - 4AC \leq 0$ 。这个式子长得像什么？

生 4：像判别式！ $\Delta \leq 0$ 。

师： $\Delta \leq 0$ 对应着什么？（指向黑板左侧环节一写下的那句话）

生 2：开口向上的二次式恒非负。

师：那能不能造一个以 t 为未知数的二次式，让它的系数恰好是 A 、 $2B$ 、 C ？这个二次式还必须对一切 t 恒非负。什么样的式子天生恒非负？

生 5：平方！一堆平方的和。

各组顺着“平方和”的方向继续尝试，得到

$$f(t) = (a_1t + b_1)^2 + (a_2t + b_2)^2 + \dots + (a_nt + b_n)^2.$$

它是若干个实数平方的和，所以对任意实数 t 都有 $f(t) \geq 0$ 。按 t 的降幂展开：

$$f(t) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)t + \sum_{i=1}^n b_i^2 = At^2 + 2Bt + C.$$

接下来分两种情况：若 $A=0$ ，则 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ ，原不等式两边都为 0，显然成立；若 $A > 0$ ，则 $f(t)$ 是开口向上且恒非负的二次式，由环节一板书的结论，其判别式

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC \leq 0,$$

即 $B^2 \leq AC$ ，代回 A, B, C 正是要证的不等式。

教师完成板书，并在黑板右侧写下本课主线：“判根（初中） $\rightarrow$ 判号（高中） $\rightarrow$ 判恒成立（高中）”，要求学生抄入学案。

- 方法提炼** (“二次式恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$ ”使用要领)
- 识别**: 条件中出现“对一切实数, 某式恒非负 (恒正)”, 或待证结论可整理成“ $B^2 \leq AC$ ”的形状;
 - 构造**: 引入主元 t , 把条件整理成关于 t 的二次式 $f(t)$, 并保证 $f(t) \geq 0$ 恒成立 (常用手法是配成平方和);
 - 结论**: 开口向上且恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$, 得到系数之间的不等关系;
 - 检查**: 二次项系数为 0 的退化情形要单独验证.

【设计意图】本环节是全课的核心, 衔接发生在两个地方. 其一, 证明的关键一步“恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$ ”正是环节一板书结论的反向调用, 学生亲眼看到“同一句话, 初中顺着读, 高中倒着用”; 其二, $f(t)$ 不是题目给的, 而是学生为了借判别式“说话”自己造出来的——从“用工具”到“造工具”, 是构造思想的启蒙. 先退到 $n = 2$ 观察结构、再回到一般 n , 遵循“先退后进”的策略, 降低了 n 元符号带来的抽象障碍.

课堂巩固练习

练习

把本课方法用于 $n = 3$ 的情形: 设 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为实数, 构造 $f(t) = (a_1t + b_1)^2 + (a_2t + b_2)^2 + (a_3t + b_3)^2$, 写出按 t 的降幂展开式, 指出 A 、 $2B$ 、 C 分别是什么, 并据此完成不等式

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

的证明.

学生独立完成展开并口头汇报, 教师板书补全:

$$f(t) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)t^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)t + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = At^2 + 2Bt + C.$$

若 $A = 0$ 则 $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, 结论显然成立; 若 $A > 0$, 由 $f(t) \geq 0$ 恒成立得 $\Delta = (2B)^2 - 4AC \leq 0$, 即 $B^2 \leq AC$, 正是要证的不等式. 教师提示: 把 $n = 3$ 写明白, 有助于看清主元 t 与下标 i 各自的“角色”, 也为扫除 n 元符号障碍铺路.

第 2 课时小结

教师指着板书右侧主线“判根 (初中) $\rightarrow$ 判号 (高中) $\rightarrow$ 判恒成立 (高中)”指出: 证明的关键一步“恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$ ”正是第 1 课时种子句的反向调用——同一句话, 初中顺着读、高中倒着用. $f(t)$ 不是题目给的, 而是为借判别式“说话”自己造出来的, 从“用工具”到“造工具”, 这是构造思想的启蒙. 要求学生把“识别—构造—结论—检查”四步连同 $n = 3$ 的展开一起抄入学案.

第3课时 变式迁移与课堂小结

本课时目标：把“二次式恒非负 $\Rightarrow \Delta \leq 0$ ”的结论放进含参情境，让学生在“套结论忘前提”的真实错误中建立“先看二次项系数是否为零、再看开口方向”的分类讨论意识，并通过课堂巩固与小结固化衔接主线，布置分层作业。

环节四 变式迁移：含参恒成立问题（约 20 分钟）

问题 3 (变式迁移)

求实数 m ，使不等式 $mx^2 + (m-1)x + m > 0$ 对一切实数 x 恒成立。

学生独立求解，教师巡视并用实物投影展示两类典型做法。

【课堂实况】约半数学生（做法甲）直接令判别式小于零：

$$(m-1)^2 - 4m^2 < 0 \iff 3m^2 + 2m - 1 > 0 \iff (3m-1)(m+1) > 0,$$

解得 $m > \frac{1}{3}$ 或 $m < -1$ ，随后直接作答，或停在原地不知道两个范围该取哪个。另一部分学生（做法乙）注意到还需要开口向上，即 $m > 0$ ，联立后得 $m > \frac{1}{3}$ 。

【师生对话】

师：做法甲解出的“ $m < -1$ ”能要吗？取 $m = -2$ 试试，原式变成什么？

生 6： $-2x^2 - 3x - 2$ ，开口向下，肯定不能恒正——抛物线开口向下， x 充分大时函数值是负的。

师：所以“ $\Delta < 0$ ”之前，先要看什么？

生 6：先看开口方向，也就是 $m > 0$ 。

师：还有一个更隐蔽的问题：这个式子一定是二次式吗？ $m = 0$ 时呢？

生 7： $m = 0$ 时原式变成 $-x > 0$ ，只对 $x < 0$ 成立，不是对一切 x 恒成立。所以要先讨论 m 是不是 0。

教师板演规范解答：当 $m = 0$ 时，原不等式化为 $-x > 0$ ，不恒成立，舍去；当 $m \neq 0$ 时，需

$$\begin{cases} m > 0, \\ (m-1)^2 - 4m^2 < 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} m > 0, \\ (3m-1)(m+1) > 0, \end{cases}$$

解得 $m > \frac{1}{3}$ 。综上， m 的取值范围是 $m > \frac{1}{3}$ 。

【设计意图】本环节把环节三建立的结论放进含参情境，故意不提醒“二次式”的前提，让学生真实暴露“套结论忘前提”的错误。 $m = 0$ 使二次式退化为一次式，正是高中含参讨论中最基本、也最容易失分的一类陷阱；让学生在初三衔接课上先犯一次、再自己纠正，比教师事前反复强调“记得讨论系数”要有效得多。这一错误经投影展示后成为全班共同的教学资源，即“错误资源化”。

课堂巩固练习

练习

求实数 m ，使不等式 $mx^2 + (m + 1)x + m > 0$ 对一切实数 x 恒成立.

多数学生已能先处理 m 是否为零与开口方向：(i) 当 $m = 0$ 时，原式为 $x > 0$ ，不恒成立，舍去；(ii) 当 $m \neq 0$ 时，需开口向上即 $m > 0$ ，且

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1 < 0 \iff 3m^2 - 2m - 1 > 0 \iff (3m + 1)(m - 1) > 0,$$

解得 $m < -\frac{1}{3}$ 或 $m > 1$ ，与 $m > 0$ 联立得 $m > 1$. 综上， m 的取值范围是 $m > 1$. 教师追问：本例与课内例题结构几乎相同，为何取值范围的左端点不同（课内是 $m > \frac{1}{3}$ ）？引导学生看到这是 Δ 随 m 变化的具体差异，而“看系数—看开口—看 Δ ”的分类讨论框架才是真正可迁移的部分.

环节五 课堂小结，提炼衔接主线（约 5 分钟）

教师请学生用一句话概括“今天对判别式的新认识”. 学生的回答包括：“判别式不只能判根，还能判恒成立”“可以造一个二次式让判别式替我们证明不等式”“用判别式之前要先看它是不是真的是二次式”. 教师据此完善黑板右侧的主线板书，并指出：到了高中，大家还会在第无数个场合遇到 Δ ——解一元二次不等式、求字母取值范围、判断直线和圆（椭圆）有没有公共点——希望那时大家记得今天的视角.

环节六 分层作业布置（约 2 分钟）

布置分层作业（见第九部分），说明 A 组人人必做，B 组原则上必做，C 组供学有余力的学生选做，下节课前收齐批改.

八、板书设计

判别式的“再认识”		
左栏：知识生长线	中栏：探究演算区	右栏：结论固化区
回顾： $\Delta > 0 / = 0 / < 0$ 与根的三种情况 种子句： $a > 0$ 且 $\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$ 恒成立 主线：判根 $\rightarrow$ 判号 $\rightarrow$ 判恒成立	问题 1： $\Delta_1 + \Delta_2 = (p_1 - p_2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ 至少一个 $\Delta_i \geq 0$ 问题 2： $f(t) = \sum (a_it + b_i)^2 = At^2 + 2Bt + C \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$	柯西不等式（加框）： $(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) \geq (\sum a_ib_i)^2$ 使用要领：识别—构造—结论—检查 易错提醒：二次项系数为 0 要单独讨论

九、作业设计

A 组（基础巩固，人人必做）

问题 4

若不等式 $x^2 - 2x + m \geq 0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围.

问题 5

用本课的方法证明：对任意实数 a, b, c, d ，都有 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$.

设计说明：A 组对应环节一与环节三的基本要求，问题 5 是柯西不等式在 $n = 2$ 时的特例，要求用判别式法（而非展开配方）完成，目的是让全体学生把“构造二次式”的基本动作再做一遍.

B 组（能力提升，原则上必做）**问题 6**

求实数 m ，使不等式 $mx^2 + (m - 1)x + m < 0$ 对一切实数 x 恒成立.

问题 7

设 a, b, c, d, e 都是实数，且 $a + b + c + d + e = 8$ ， $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$. 求 e 的最大值.

设计说明：问题 6 是课内变式题的镜像（恒正改为恒负），考查开口方向与判别式的联立以及对 $m = 0$ 的讨论；问题 7 是柯西不等式的直接应用，让学生体会“证明了的工具立刻可以当作武器使用”.

C 组（衔接拓展，选做）**问题 8**

探究柯西不等式等号成立的条件：证明等号成立当且仅当 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 对应成比例（即 a_i 全为 0，或存在常数 k ，使 $b_i = ka_i$ 对一切 i 成立）.

问题 9

已知 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $x + 2y + 3z$ 的最大值，并指出取到最大值时 x, y, z 的值.

设计说明：C 组指向高中. 问题 8 要求学生回到 $f(t)$ 的定义，理解“ $\Delta = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ 有实根 $t_0 \Leftrightarrow$ 每个平方都为 0”，把等号条件想明白；问题 9 是二维、三维形式的柯西不等式在求最值中的初步应用，并隐式调用问题 8 的等号条件.

十、教学反思

(一) 目标达成情况

从课堂表现和回收的 30 份学案看, 课前预判的三个障碍都在课堂上真实出现并得到了处理: 环节二中没有人主动相加两个判别式, 说明“功能固化”的预判准确; 环节三里有两个小组在教师点拨前已自发写出 $n=2$ 的配方, 说明“先退后进”的脚手架是有效的; 环节四中约半数学生直接套“ $\Delta < 0$ ”, 典型错误经投影展示后, 学生在学案上补全了分类讨论. 课后作业中, A 组两题的正确率很高; B 组问题 6 仍有近四分之一的学生只由 $\Delta < 0$ 解出“ $m < -1$ 或 $m > \frac{1}{3}$ ”, 忘记开口方向的要求, 说明分类讨论意识即便经 3 课时训练也只是“种下”, 还需高中多次巩固.

(二) 不足与改进

一是 n 元符号仍是部分学生的障碍. 为此第 2 课时设置了 $n=3$ 的课堂巩固, 让学生先在具体中看清 $f(t)$ 的结构再回到求和号; 从回收学案看, 多数学生能正确写出 A 、 $2B$ 、 C , 但仍有少数分不清主元 t 与下标 i . 下次教学可在学案上为 $n=3$ 展开分步留白, 让通分、合并同类项的过程“看得见”.

二是各课时的时间分配仍需打磨. 第 2 课时核心探究约占 30 分钟, 方法要领的固化偏紧; 第 3 课时含参问题的错误展示与规范解答并列推进, 班级状态欠佳时环节五小结仍会被压缩. 课内分 3 课时后总体不再“前松后紧”, 但越靠后的环节越需教师主动控时, 避免探究热情挤掉小结与作业讲评的时间.

三是小结环节仍由教师主导偏多. 可以让学生先同桌互说“今天对判别式的新认识”, 再请两三位学生全班分享, 教师只补漏.

(三) 对课题研究的启示

本课再次印证了课题组的基本判断: 衔接课的核心任务是“工具用法观的升级”, 而不是高中知识的提前抢跑. 判别式学生在初三已经“会算”, 但“会用”的层次——整体使用、反向使用、为使用而构造——需要专门的教学设计才能达成. 选择“初高中共用、用法反转”的工具点开发“再认识”系列课例, 是一条可行的衔接课程开发路径.

十一、案例评析 (课题组评议)

本案例的价值首先在于衔接点的选取. 判别式是初高中教材中共有的语汇, 但使用方向相反: 初中由系数判根, 高中由符号定系数. 课例抓住这一“方向反转”, 把衔接落到实处, 学生获得的不是零散的解题技巧, 而是对一个工具的全新理解.

其次, 课例的教学设计具有明显的“预谋”特征: 环节一的种子句与环节三的反向调用前后呼应, 环节二的配方处理与环节三的代数展开技能相承, 环节四的错误预设与投影展示构成课堂生成. 三个环节环环相扣, 体现了“问题链”设计的整体性.

第三, 本课例具有可复制性. “再认识”的模式可以平行迁移到韦达定理、配方法、因式分解等同样“初高中共用、用法不同”的内容上 (课题组已据此开发案例二).

需要商榷的一点是: 柯西不等式的 n 元形式对部分初三学生仍偏抽象, 是否可以先在学案中给出 $n=3$ 的完全展开式, 再过渡到求和号表示, 值得在下一轮教学中作对照实验. 此外, 本案例的成效分析目前主要依据课堂观察与作业反馈, 建议后续补充前后测数据和课后访谈, 使案例证据更加完整.

附录: 作业参考答案与简析

问题 4 (A 组)

简析. 不等式 $x^2 - 2x + m \geq 0$ 对一切实数 x 恒成立. 二次项系数 $1 > 0$, 只需 $\Delta = (-2)^2 - 4m \leq 0$, 解得 $m \geq 1$. $\square$

问题 5 (A 组)

简析. 若 $a = b = 0$, 不等式两边均为 0, 成立. 否则构造

$$f(t) = (at + c)^2 + (bt + d)^2 = (a^2 + b^2)t^2 + 2(ac + bd)t + (c^2 + d^2),$$

它是平方和, 对一切实数 t 有 $f(t) \geq 0$, 且二次项系数 $a^2 + b^2 > 0$, 故

$$\Delta = 4(ac + bd)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \leq 0,$$

即 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. $\square$

问题 6 (B 组)

简析. 当 $m = 0$ 时, 原不等式为 $-x < 0$, 不恒成立, 舍去. 当 $m \neq 0$ 时, 需开口向下且判别式为负:

$$\begin{cases} m < 0, \\ (m-1)^2 - 4m^2 < 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} m < 0, \\ (3m-1)(m+1) > 0, \end{cases}$$

解得 $m < -1$. 综上, m 的取值范围是 $m < -1$. $\square$

问题 7 (B 组)

简析. 由柯西不等式,

$$(a + b + c + d)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

代入 $a + b + c + d = 8 - e$ 与 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16 - e^2$, 得

$$(8 - e)^2 \leq 4(16 - e^2) \iff 5e^2 - 16e \leq 0 \iff 0 \leq e \leq \frac{16}{5}.$$

当 $a = b = c = d = \frac{6}{5}$, $e = \frac{16}{5}$ 时, 两个条件都满足且不等式取等号, 故 e 的最大值为 $\frac{16}{5}$. $\square$

问题 8 (C 组)

简析. 若 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 两边均为 0, 等号成立, 结论中 “ a_i 全为 0” 的情形得证. 下设 $A = \sum a_i^2 > 0$. 等号成立当且仅当 $\Delta = 0$, 即 $f(t) = At^2 + 2Bt + C$ 有实根 t_0 , 使 $f(t_0) = 0$. 而 $f(t_0) = \sum_{i=1}^n (a_i t_0 + b_i)^2$ 是平方和, 故 $f(t_0) = 0$ 当且仅当 $a_i t_0 + b_i = 0$ 对一切 i 成立, 即 $b_i = -t_0 a_i$ 对一切 i 成立. 取 $k = -t_0$, 即 $b_i = k a_i$, 也就是说两组数对应成比例. $\square$

问题 9 (C 组)

简析. 由柯西不等式,

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 14,$$

故 $x + 2y + 3z \leq \sqrt{14}$. 等号成立当且仅当 $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, 结合 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 得 $x = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $y = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $z = \frac{3}{\sqrt{14}}$. 所以最大值为 $\sqrt{14}$. $\square$

执笔: 康劲鹏; 课例实施: 2026 年寒假创美营; 案例整理: 2026 年 7 月.