

三道组合与球面面积问题

LeyuDame

2026 年 7 月 2 日

1 球面被一个大圆与一个小圆分割后的四块面积

1.1 题目

设球面半径为 R , 球心为 O . 取过球心的平面

$$P: z = 0,$$

它与球面交成一个大圆. 再取不过球心的平面

$$Q: \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = h,$$

其中 $\mathbf{v}$ 是平面 Q 的单位法向量, $\mathbf{r}$ 是球面上一点的位置向量, 且 $0 < h < R$.

令 $\mathbf{v}$ 与 z -轴的夹角为 θ . 通过绕 z -轴旋转坐标, 可以不失一般性地取

$$\mathbf{v} = (\sin \theta, 0, \cos \theta).$$

记

$$d = \frac{h}{R}, \quad s = \sin \theta, \quad c = \cos \theta.$$

两个截圆在球面上相交的条件为

$$h < R \sin \theta,$$

也就是

$$d < s.$$

我们要求四块区域的面积:

$$\{z \geq 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq h\}, \quad \{z \geq 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} < h\},$$

$$\{z < 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq h\}, \quad \{z < 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} < h\}.$$

1.2 解答

先在单位球面上计算, 最后整体乘以 R^2 . 记

$$A_{++} = \text{Area}\{z \geq 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq d\}$$

为单位球面上的对应面积.

则

$$A_{++} = 2\pi(1 - d) + 2d \arccos\left(\frac{dc}{s\sqrt{1-d^2}}\right) - 2 \operatorname{atan2}\left(\sqrt{s^2 - d^2}, c\right).$$

这里 $\operatorname{atan2}(Y, X)$ 表示点 (X, Y) 的极角. 因为

$$Y = \sqrt{s^2 - d^2} > 0,$$

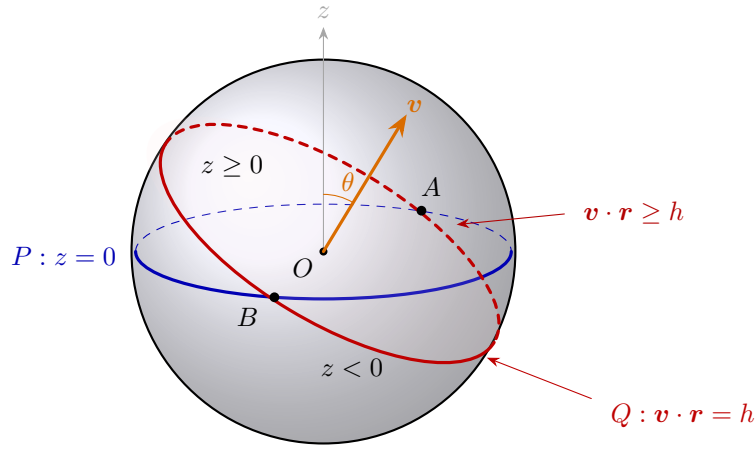


图 1: 大圆 P 与小圆 Q 在球面上相交于两点 A, B . 蓝色曲线表示过球心的大圆, 红色曲线表示不过球心的倾斜小圆; 两条截圆把球面分成四块.

这个写法可以同时处理 $c > 0$ 、 $c = 0$ 、 $c < 0$ 三种情形.

因此半径为 R 的球面上有

$$\begin{aligned} S_{++} &= \text{Area}\{z \geq 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq h\} \\ &= R^2 \left[2\pi(1-d) + 2d \arccos\left(\frac{d \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{1-d^2}}\right) - 2 \operatorname{atan2}\left(\sqrt{\sin^2 \theta - d^2}, \cos \theta\right) \right]. \end{aligned}$$

其余三块由总面积关系得到. 上半球面积为

$$2\pi R^2,$$

小圆截出的球冠面积为

$$2\pi R^2(1-d).$$

因此

$$\begin{aligned} S_{+-} &= \text{Area}\{z \geq 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} < h\} = 2\pi R^2 - S_{++}, \\ S_{-+} &= \text{Area}\{z < 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq h\} = 2\pi R^2(1-d) - S_{++}, \\ S_{--} &= \text{Area}\{z < 0, \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} < h\} \\ &= 4\pi R^2 - S_{++} - S_{+-} - S_{-+}. \end{aligned}$$

1.3 推导说明

下面推导 A_{++} . 其余三块只需要用上半球面积和球冠面积相减.

取

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{e}_1 = (\cos \theta, 0, -\sin \theta), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0).$$

则 $\mathbf{u}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是一组正交单位向量. 单位球面上满足 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq d$ 的球冠可以写成

$$\mathbf{r} = t\mathbf{u} + \sqrt{1-t^2}(\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2), \quad d \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

这里 $t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$, 所以 $t = d$ 是小圆边界, $t = 1$ 是球冠顶点. 这个参数化的面积元为

$$dA = d\phi dt.$$

现在加入上半球条件 $z \geq 0$. 由上式中 $\mathbf{r}$ 的第三个坐标可得

$$z = t \cos \theta - \sqrt{1-t^2} \sin \theta \cos \phi.$$

因此

$$z \geq 0 \iff \cos \phi \leq \frac{t \cos \theta}{\sin \theta \sqrt{1-t^2}}.$$

令

$$q(t) = \frac{tc}{s\sqrt{1-t^2}}.$$

由于 $d < s$, 小圆与大圆相交; 当 $d \leq t < s$ 时有 $|q(t)| < 1$. 于是对固定的 t , 满足条件的 ϕ 的长度为

$$L(t) = 2\pi - 2\arccos q(t), \quad d \leq t < s.$$

当 $t \geq s$ 时, 需要按 $c = \cos \theta$ 的符号理解: 若 $c > 0$, 整个纬圈都在上半球中; 若 $c < 0$, 整个纬圈都在下半球中; 若 $c = 0$, 只有 $t = s = 1$ 的退化端点, 不影响面积.

因此

$$A_{++} = \int_d^s (2\pi - 2\arccos q(t)) dt + \begin{cases} 2\pi(1-s), & c > 0, \\ 0, & c < 0. \end{cases}$$

计算这个积分时使用原函数

$$\int \arccos q(t) dt = t \arccos q(t) - \operatorname{atan2}(\sqrt{s^2 - t^2}, c).$$

把上下限 d, s 代入, 上面的分段端点项会合并为同一个表达式:

$$A_{++} = 2\pi(1-d) + 2d \arccos\left(\frac{dc}{s\sqrt{1-d^2}}\right) - 2 \operatorname{atan2}(\sqrt{s^2 - d^2}, c).$$

这就是前面使用的公式.

如果直接用通常的球坐标

$$\mathbf{r} = (\sin \varphi \cos \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi),$$

其中上半球条件为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

小圆球冠条件为

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq d.$$

也就是

$$s \sin \varphi \cos \psi + c \cos \varphi \geq d.$$

也可以得到同一结果, 但积分区域的边界不如上面的 t, ϕ 参数清楚.

需要注意的是, 如果只给两个平面的夹角 α , 还不完全够. 平面夹角只决定 $\sin \theta$, 但上半球中的面积还依赖 $\cos \theta$ 的符号. 把 $\mathbf{v}$ 关于赤道反射时, 上下两块面积会互换.

2 圆周上用占两格与占一格的小方块铺满的无标号圆排列计数

2.1 题目

有 M 个单位空位围成一圈. 使用 n 个占连续两格的小方块, 记为 D ; 使用 $M - 2n$ 个占一格的小方块, 记为 S . 要求

$$0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{M}{2} \right\rfloor.$$

把每个 D 与每个 S 都看成一个块. 总块数为

$$N = n + (M - 2n) = M - n.$$

于是原问题等价于: 把 n 个相同的 D 和 $N - n = M - 2n$ 个相同的 S 排成圆圈, 旋转相同视为同一种.

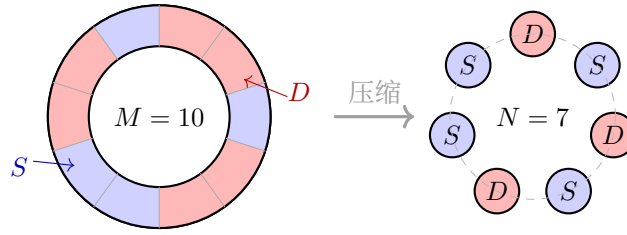


图 2: 例如 $M = 10, n = 3$ 时, 三个占两格块 D 与四个占一格块 S 可压缩成 $N = M - n = 7$ 个块的二元圆排列. 旋转相同的排列只计一次.

2.2 解答

如果镜像反射不合并, 只按旋转取等价类, 则答案为

$$\frac{1}{N} \sum_{d|\gcd(N,n)} \varphi(d) \binom{N/d}{n/d}.$$

代入 $N = M - n$, 得到

$$\frac{1}{M-n} \sum_{d|\gcd(M-n,n)} \varphi(d) \binom{(M-n)/d}{n/d}.$$

其中 φ 是欧拉函数.

2.3 为什么是这个公式

考虑长度为 N 的圆排列. 旋转群共有 N 个元素. 若一个旋转的循环分解有 g 个循环, 每个循环长度为 N/g , 那么被它固定的二元串必须在每个循环上取同一个符号.

若固定串中一共有 n 个 D , 则每选中一个循环放 D , 会贡献 N/g 个 D . 因此必须有

$$\frac{N}{g} \mid n.$$

令

$$d = \frac{N}{g},$$

则 $d \mid \gcd(N, n)$. 此时循环数为 N/d , 其中要选出 n/d 个循环放 D , 所以固定排列数为

$$\binom{N/d}{n/d}.$$

具有这种循环长度参数 d 的旋转共有 $\varphi(d)$ 个. 对所有旋转取平均, 得到

$$\frac{1}{N} \sum_{d|\gcd(N,n)} \varphi(d) \binom{N/d}{n/d}.$$

特殊情形也吻合直觉. 若 $n = 0$, 只有 S , 答案为 1. 若 $M = 2n$, 只有 D , 答案也为 1.

如果镜像反射也视为相同, 则需要改用二面体群, 也就是手镯计数. 此时除了旋转固定项, 还要加入反射固定项, 公式会按照 N 的奇偶性分类.

3 有限和、母函数与一维铺砖

3.1 题目

设 n 为非负整数, 定义

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n-i}{i} x^i.$$

由于当 $2i > n$ 时

$$\binom{n-i}{i} = 0,$$

所以这个无穷和实际上是有限和:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} x^i.$$

3.2 组合意义

组合意义如下: 用占一格的小方块 S 与占两格的小方块 D 铺满长度为 n 的线段. 每使用一个 D , 赋予权重 x . 那么 $P_n(x)$ 就是所有铺法的总权重生成函数.

如果使用 i 个 D , 它们占去 $2i$ 格, 还需要 $n - 2i$ 个 S . 总块数为

$$i + (n - 2i) = n - i.$$

在这 $n - i$ 个块中选出 i 个位置放 D , 排列数为

$$\binom{n-i}{i}.$$

因此对应权重为

$$\binom{n-i}{i} x^i.$$

3.3 递推关系

按最后一块分类.

若最后一块是 S , 前面需要铺满长度 $n - 1$, 贡献为

$$P_{n-1}(x).$$

若最后一块是 D , 前面需要铺满长度 $n - 2$, 并且额外得到一个权重 x , 贡献为

$$xP_{n-2}(x).$$

所以

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + xP_{n-2}(x),$$

初值为

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1.$$

3.4 闭式表达

递推的特征方程为

$$\lambda^2 = \lambda + x,$$

也就是

$$\lambda^2 - \lambda - x = 0.$$

其两根为

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

因此

$$P_n(x) = \frac{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

写开就是

$$P_n(x) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{1+4x}}.$$

当 $x = -\frac{1}{4}$ 时, 两根重合. 取极限可得

$$P_n\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{n+1}{2^n}.$$

3.5 普通母函数

设

$$G(t) = \sum_{n \geq 0} P_n(x)t^n.$$

由递推

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + xP_{n-2}(x)$$

得到

$$G(t) - P_0(x) - P_1(x)t = t(G(t) - P_0(x)) + xt^2G(t).$$

代入

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1,$$

可得

$$G(t) - 1 - t = t(G(t) - 1) + xt^2G(t).$$

整理为

$$G(t)(1 - t - xt^2) = 1.$$

因此

$$\sum_{n \geq 0} P_n(x)t^n = \frac{1}{1 - t - xt^2}.$$

3.6 与斐波那契多项式的关系

若定义斐波那契多项式

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1,$$

并令

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + xF_{n-2}(x),$$

则

$$P_n(x) = F_{n+1}(x).$$

特别地, 当 $x = 1$ 时,

$$P_n(1) = F_{n+1},$$

这里右侧就是通常的斐波那契数列.

参考资料

1. Spherical cap (球冠): https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap. 第一题中 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} \geq h$ 对应的基本球面区域.
2. Spherical geometry (球面几何): https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry. 球面上的大圆、球面距离、球面三角形都属于这一主题.

3. Spherical lune (球面二角形): https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_lune. 两个大圆围出的球面区域; 第一题中的角度修正项与这一思想相近.
4. Burnside's lemma (Burnside 引理): https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside%27s_lemma. 第二题计数所用的基本工具.
5. Necklace (项链计数): [https://en.wikipedia.org/wiki/Necklace_\(combinatorics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Necklace_(combinatorics)). 第二题压缩成 D, S 后就是固定颜色数目的二元项链计数.
6. Pólya enumeration theorem (Pólya 计数定理): https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%B3lya_enumeration_theorem. Burnside 引理的生成函数版本.
7. Fibonacci polynomials (斐波那契多项式): https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_polynomials. 第三题的 $P_n(x)$ 属于斐波那契型递推多项式.
8. Benjamin, Arthur T.; Quinn, Jennifer J. *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. Mathematical Association of America, 2003. 该书系统使用铺砖模型解释斐波那契数及相关恒等式. 参考页面: https://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_That_Really_Count.
9. A weighted extension of Fibonacci numbers: <https://arxiv.org/abs/2301.08016>. 这是一个带权斐波那契数的推广例子, 可作为第三题中权重 x 进一步推广的参考.