三道组合与球面面积问题

LeyuDame

2026 年 7 月 2 日

1　球面被一个大圆与一个小圆分割后的四块面积

1.1　题目

设球面半径为 R，球心为 O. 取过球心的平面

$$P : z = 0,$$

它与球面交成一个大圆. 再取不过球心的平面

$$Q : \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} = h,$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 是平面 Q 的单位法向量，$\boldsymbol{r}$ 是球面上一点的位置向量，且 $0 < h < R$.

令 $\boldsymbol{v}$ 与 z-轴的夹角为 θ. 通过绕 z-轴旋转坐标，可以不失一般性地取

$$\boldsymbol{v} = (\sin\theta, 0, \cos\theta).$$

记

$$d = \frac{h}{R}, \qquad s = \sin\theta, \qquad c = \cos\theta.$$

两个截圆在球面上相交的条件为

$$h < R\sin\theta,$$

也就是

$$d < s.$$

我们要求四块区域的面积:

$$\{z \geq 0,\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} \geq h\}, \qquad \{z \geq 0,\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} < h\},$$

$$\{z < 0,\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} \geq h\}, \qquad \{z < 0,\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} < h\}.$$

1.2　解答

先在单位球面上计算，最后整体乘以 R^2. 记

$$A_{++} = \mathrm{Area}\{z \geq 0,\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r} \geq d\}$$

为单位球面上的对应面积.

则

$$A_{++} = 2\pi(1-d) + 2d\arccos\left(\frac{dc}{s\sqrt{1-d^2}}\right) - 2\,\mathrm{atan2}\left(\sqrt{s^2-d^2}, c\right).$$

这里 $\mathrm{atan2}(Y, X)$ 表示点 (X, Y) 的极角. 因为

$$Y = \sqrt{s^2-d^2} > 0,$$

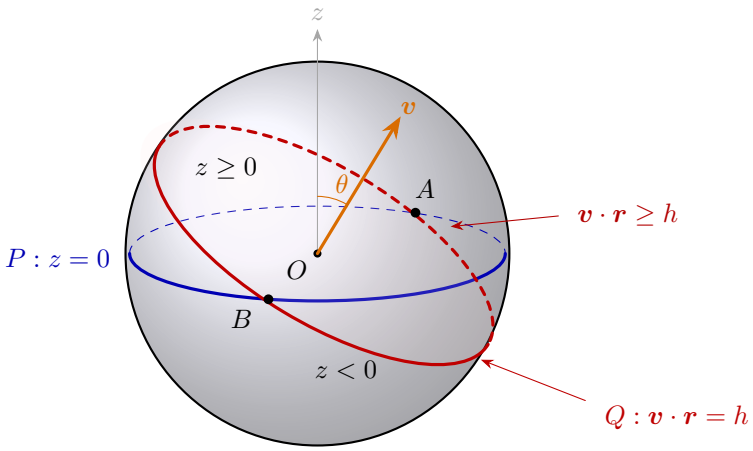


图 1: 大圆 P 与小圆 Q 在球面上相交于两点 A, B. 蓝色曲线表示过球心的大圆，红色曲线表示不过球心的倾斜小圆；两条截圆把球面分成四块.

这个写法可以同时处理 $c > 0$、$c = 0$、$c < 0$ 三种情形.

因此半径为 R 的球面上有

$$\begin{aligned} S_{++} &= \mathrm{Area}\{z \geq 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} \geq h\} \\ &= R^2\left[2\pi(1-d) + 2d\arccos\left(\frac{d\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{1-d^2}}\right) - 2\,\mathrm{atan2}\left(\sqrt{\sin^2\theta - d^2}, \cos\theta\right)\right]. \end{aligned}$$

其余三块由总面积关系得到. 上半球面积为

$$2\pi R^2,$$

小圆截出的球冠面积为

$$2\pi R^2(1-d).$$

因此

$$\begin{aligned} S_{+-} &= \mathrm{Area}\{z \geq 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} < h\} = 2\pi R^2 - S_{++}, \\ S_{-+} &= \mathrm{Area}\{z < 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} \geq h\} = 2\pi R^2(1-d) - S_{++}, \\ S_{--} &= \mathrm{Area}\{z < 0,\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} < h\} \\ &= 4\pi R^2 - S_{++} - S_{+-} - S_{-+}. \end{aligned}$$

1.3　推导说明

下面推导 A_{++}. 其余三块只需要用上半球面积和球冠面积相减.

取

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{e}_1 = (\cos\theta, 0, -\sin\theta), \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0).$$

则 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 是一组正交单位向量. 单位球面上满足 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} \geq d$ 的球冠可以写成

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{u} + \sqrt{1-t^2}(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_2), \qquad d \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$

这里 $t = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}$，所以 $t = d$ 是小圆边界，$t = 1$ 是球冠顶点. 这个参数化的面积元为

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}t.$$

现在加入上半球条件 $z \geq 0$. 由上式中 $\boldsymbol{r}$ 的第三个坐标可得

$$z = t\cos\theta - \sqrt{1-t^2}\sin\theta\cos\phi.$$

因此

$$z \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\phi \leq \frac{t\cos\theta}{\sin\theta\sqrt{1-t^2}}.$$

令

$$q(t)=\frac{tc}{s\sqrt{1-t^2}}.$$

由于 $d<s$，小圆与大圆相交；当 $d\le t<s$ 时有 $|q(t)|<1$. 于是对固定的 t，满足条件的 ϕ 的长度为

$$L(t)=2\pi-2\arccos q(t),\qquad d\le t<s.$$

当 $t\ge s$ 时，需要按 $c=\cos\theta$ 的符号理解：若 $c>0$，整个纬圈都在上半球中；若 $c<0$，整个纬圈都在下半球中；若 $c=0$，只有 $t=s=1$ 的退化端点，不影响面积.

因此

$$A_{++}=\int_d^s\left(2\pi-2\arccos q(t)\right)\,\mathrm{d}t+\begin{cases}2\pi(1-s), & c>0,\\ 0, & c<0.\end{cases}$$

计算这个积分时使用原函数

$$\int\arccos q(t)\,\mathrm{d}t=t\arccos q(t)-\operatorname{atan2}\left(\sqrt{s^2-t^2},c\right).$$

把上下限 d,s 代入，上面的分段端点项会合并为同一个表达式：

$$A_{++}=2\pi(1-d)+2d\arccos\left(\frac{dc}{s\sqrt{1-d^2}}\right)-2\operatorname{atan2}\left(\sqrt{s^2-d^2},c\right).$$

这就是前面使用的公式.

如果直接用通常的球坐标

$$\boldsymbol{r}=(\sin\varphi\cos\psi,\sin\varphi\sin\psi,\cos\varphi),$$

其中上半球条件为

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}.$$

小圆球冠条件为

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}\ge d.$$

也就是

$$s\sin\varphi\cos\psi+c\cos\varphi\ge d.$$

也可以得到同一结果，但积分区域的边界不如上面的 t,ϕ 参数清楚.

需要注意的是，如果只给两个平面的夹角 α，还不完全够. 平面夹角只决定 $\sin\theta$，但上半球中的面积还依赖 $\cos\theta$ 的符号. 把 $\boldsymbol{v}$ 关于赤道反射时，上下两块面积会互换.

2 圆周上用占两格与占一格的小方块铺满的无标号圆排列计数

2.1 题目

有 M 个单位空位围成一圈. 使用 n 个占连续两格的小方块，记为 D；使用 $M-2n$ 个占一格的小方块，记为 S. 要求

$$0\le n\le\left\lfloor\frac{M}{2}\right\rfloor.$$

把每个 D 与每个 S 都看成一个块. 总块数为

$$N=n+(M-2n)=M-n.$$

于是原问题等价于：把 n 个相同的 D 和 $N-n=M-2n$ 个相同的 S 排成圆圈，旋转相同视为同一种.

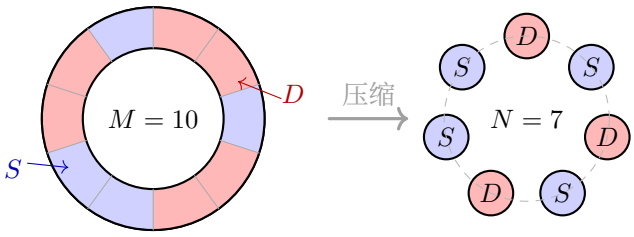


图 2: 例如 $M = 10, n = 3$ 时，三个占两格块 D 与四个占一格块 S 可压缩成 $N = M - n = 7$ 个块的二元圆排列. 旋转相同的排列只计一次.

2.2 解答

如果镜像反射不合并，只按旋转取等价类，则答案为

$$\frac{1}{N}\sum_{d\mid\gcd(N,n)}\varphi(d)\binom{N/d}{n/d}.$$

代入 $N = M - n$，得到

$$\frac{1}{M-n}\sum_{d\mid\gcd(M-n,n)}\varphi(d)\binom{(M-n)/d}{n/d}.$$

其中 φ 是欧拉函数.

2.3 为什么是这个公式

考虑长度为 N 的圆排列. 旋转群共有 N 个元素. 若一个旋转的循环分解有 g 个循环，每个循环长度为 N/g，那么被它固定的二元串必须在每个循环上取同一个符号.

若固定串中一共有 n 个 D，则每选中一个循环放 D，会贡献 N/g 个 D. 因此必须有

$$\frac{N}{g} \mid n.$$

令

$$d = \frac{N}{g},$$

则 $d \mid \gcd(N, n)$. 此时循环数为 N/d，其中要选出 n/d 个循环放 D，所以固定排列数为

$$\binom{N/d}{n/d}.$$

具有这种循环长度参数 d 的旋转共有 $\varphi(d)$ 个. 对所有旋转取平均，得到

$$\frac{1}{N}\sum_{d\mid\gcd(N,n)}\varphi(d)\binom{N/d}{n/d}.$$

特殊情形也吻合直觉. 若 $n = 0$，只有 S，答案为 1. 若 $M = 2n$，只有 D，答案也为 1.

如果镜像反射也视为相同，则需要改用二面体群，也就是手镯计数. 此时除了旋转固定项，还要加入反射固定项，公式会按照 N 的奇偶性分类.

3 有限和、母函数与一维铺砖

3.1 题目

设 n 为非负整数，定义

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\binom{n-i}{i}x^i.$$

由于当 $2i > n$ 时

$$\binom{n-i}{i} = 0,$$

所以这个无穷和实际上是有限和：

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-i}{i} x^i.$$

3.2 组合意义

组合意义如下：用占一格的小方块 S 与占两格的小方块 D 铺满长度为 n 的线段. 每使用一个 D，赋予权重 x. 那么 $P_n(x)$ 就是所有铺法的总权重生成函数.

如果使用 i 个 D，它们占去 $2i$ 格，还需要 $n-2i$ 个 S. 总块数为

$$i + (n-2i) = n - i.$$

在这 $n-i$ 个块中选出 i 个位置放 D，排列数为

$$\binom{n-i}{i}.$$

因此对应权重为

$$\binom{n-i}{i} x^i.$$

3.3 递推关系

按最后一块分类.

若最后一块是 S，前面需要铺满长度 $n-1$，贡献为

$$P_{n-1}(x).$$

若最后一块是 D，前面需要铺满长度 $n-2$，并且额外得到一个权重 x，贡献为

$$xP_{n-2}(x).$$

所以

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + xP_{n-2}(x),$$

初值为

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = 1.$$

3.4 闭式表达

递推的特征方程为

$$\lambda^2 = \lambda + x,$$

也就是

$$\lambda^2 - \lambda - x = 0.$$

其两根为

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}.$$

因此

$$P_n(x) = \frac{\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1}}{\lambda_+ - \lambda_-}.$$

写开就是

$$P_n(x)=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{1+4x}}.$$

当 $x=-\frac{1}{4}$ 时，两根重合. 取极限可得

$$P_n\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{n+1}{2^n}.$$

3.5 普通母函数

设

$$G(t)=\sum_{n\geq 0}P_n(x)t^n.$$

由递推

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+xP_{n-2}(x)$$

得到

$$G(t)-P_0(x)-P_1(x)t=t\big(G(t)-P_0(x)\big)+xt^2G(t).$$

代入

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=1,$$

可得

$$G(t)-1-t=t(G(t)-1)+xt^2G(t).$$

整理为

$$G(t)(1-t-xt^2)=1.$$

因此

$$\sum_{n\geq 0}P_n(x)t^n=\frac{1}{1-t-xt^2}.$$

3.6 与斐波那契多项式的关系

若定义斐波那契多项式

$$F_0(x)=0,\qquad F_1(x)=1,$$

并令

$$F_n(x)=F_{n-1}(x)+xF_{n-2}(x),$$

则

$$P_n(x)=F_{n+1}(x).$$

特别地，当 $x=1$ 时，

$$P_n(1)=F_{n+1},$$

这里右侧就是通常的斐波那契数列.

参考资料

1. Spherical cap（球冠）：https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_cap. 第一题中 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}\geq h$ 对应的基本球面区域.

2. Spherical geometry（球面几何）：https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry. 球面上的大圆、球面距离、球面三角形都属于这一主题.

3. Spherical lune（球面二角形）：https://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_lune. 两个大圆围出的球面区域；第一题中的角度修正项与这一思想相近.

4. Burnside's lemma（Burnside 引理）：https://en.wikipedia.org/wiki/Burnside%27s_lemma. 第二题计数所用的基本工具.

5. Necklace（项链计数）：https://en.wikipedia.org/wiki/Necklace_(combinatorics). 第二题压缩成 D, S 后就是固定颜色数目的二元项链计数.

6. Pólya enumeration theorem（Pólya 计数定理）：https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%B3lya_enumeration_theorem.Burnside 引理的生成函数版本.

7. Fibonacci polynomials（斐波那契多项式）：https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_polynomials. 第三题的 $P_n(x)$ 属于斐波那契型递推多项式.

8. Benjamin, Arthur T.; Quinn, Jennifer J. *Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. Mathematical Association of America, 2003. 该书系统使用铺砖模型解释斐波那契数及相关恒等式. 参考页面：https://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_That_Really_Count.

9. A weighted extension of Fibonacci numbers：https://arxiv.org/abs/2301.08016. 这是一个带权斐波那契数的推广例子，可作为第三题中权重 x 进一步推广的参考.