不等式

LeyuDame

2026 年 6 月 7 日

目录

第 1 讲不等式与恒等式、二次形式与调整

第 2 讲重要不等式及其应用

第 3 讲不等式综合技巧

第 4 讲归纳法与不等式

第 5 讲导数与不等式

第 1 讲例 1

已知 $k > a > b > c > 0$, 求证:

$$k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) > 0. \tag{1}$$

第 1 讲例 2

已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，求证：

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6. \quad (3)$$

第 1 讲例 3

证明柯西不等式

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right). \quad (5)$$

第 1 讲例 4

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3，面积分别为 $\triangle_1, \triangle_2$. 又记

$$H = a_1^2\left(-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) + a_2^2\left(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2\right) + a_3^2\left(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2\right).$$

则对于 $\lambda \in \left\{\frac{b_1^2}{a_1^2}, \frac{b_2^2}{a_2^2}, \frac{b_3^2}{a_3^2}\right\}$，

$$H \geqslant 8\left(\lambda\triangle_1^2 + \frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right). \tag{7}$$

第 1 讲例 5

方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根 α,β,γ 均为实数，$a^2=2b+2$. 证明

$$|\ a-c\ |\leqslant 2. \tag{9}$$

第 1 讲例 6

$\triangle ABC$ 的边长为 a, b, c，周长为 2. 求证

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2. \tag{11}$$

第 1 讲例 7

证明 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

第 1 讲例 8

A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角. 求证对任意实数 x, y, z,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geqslant 0. \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &= (x^2 - 2xy\cos C - 2zx\cos B) + y^2 + z^2 - 2yz\cos A \\ &= (x - y\cos C - z\cos B)^2 + y^2\sin^2 C + z^2\sin^2 B - 2yz\cos A - \\ &2yz\cos B\cos C \\ &= (x - y\cos C - z\cos B)^2 + (y\sin C - z\sin B)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

第 1 讲例 9

λ, μ, ν 为任意实数, a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的边, $\triangle$ 为这三角形的面积, 证明

$$\left(\lambda a^2 + \mu b^2 + \nu c^2\right)^2 \geqslant 16(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\triangle^2, \tag{18}$$

当且仅当 $\lambda : \mu : \nu = (b^2 + c^2 - a^2) : (c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)$ 时等号成立.

第 1 讲例 10

a, b, c 为正实数, 求证

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}. \tag{20}$$

第 1 讲例 11

设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, $m > 0$, 求证

$$\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{c}{c+m}. \tag{23}$$

第 1 讲例 12

已知 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$ 满足

$$y_2 \geqslant y_1 \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2, \tag{25}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant y_1 + y_2, \tag{26}$$

第 1 讲例 13

证明在 $\triangle ABC$ 中，

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{32}$$

第 2 讲例 1

设有两个有序数组 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 及 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

第 2 讲例 2

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相等的自然数, 求证:

$$a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \cdots + \frac{a_n^2}{n} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

第 2 讲例 3

设 a, b, c 为正数, 证明:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{4}$$

第 2 讲例 4

设 s, t 为正数, n 为自然数. 证明:

$$s^{n+1} + nt^{n+1} \geqslant (n+1)t^n s. \tag{7}$$

第 2 讲例 5

设 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$. 求 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ ，使得“距离” $d = (p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2 + \cdots + (p_n - x_n)^2$ 为最小.

第 2 讲例 6

如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ ，那么

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \sum a_i \cdot \sum b_i, \tag{13}$$

它称为契比雪夫 (P. Y. Chebyshev, 1821—1894) 不等式. 在 $\{a_i\}$ 或 $\{b_i\}$ 中恰有一个改为相反的顺序时,(13) 的 "$\geqslant$" 也改为 "$\leqslant$".
算术-几何平均不等式也是经常使用的不等式 (简称为 A-G 不等式):
设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数，则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{14}$$

$n = 2$ 或 3 的情况, 在中学里尤为常见.

第 2 讲例 7

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 为非负实数，求证

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\right) \\ \leqslant & (n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

第 2 讲例 8

a, b, c 都是正数. 证明

$$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \tag{16}$$

第 2 讲例 9

已知 a, a' 为正，并且行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{20}$$

求证行列式 $\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix} \leqslant 0,$ (21)

这里行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ 即表达式 $ac - b^2$

第 2 讲例 10

设 $x_i \geqslant 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 证明樊畴 (1914—2010) 不等式

$$\frac{\prod (x_i - 1)}{\left(\sum (x_i - 1)\right)^n} \leqslant \frac{\prod x_i}{\left(\sum x_i\right)^n}. \tag{24}$$

这里 $\prod$ 是连乘符号，$\prod x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$

第 2 讲例 11

设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，并且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1, \tag{30}$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}. \tag{31}$$

第 2 讲例 12

设 $l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n = 1$ ，这里 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为已知数。求 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 的最小值。

第 2 讲例 13

证明关于两个三角形的匹窦不等式

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)\geqslant 16\triangle\triangle_1,(37)$$

这里 $a,b,c,\triangle$ 及 $a_1,b_1,c_1,\triangle_1$ 分别为两个三角形的边长与面积.

第 2 讲例 14

设 $n \geqslant 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数，并且

$$\sum x_i = 1, \tag{38}$$

求证 $\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$. (39)

第 2 讲例 15

正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$ 的最小值.

第 2 讲例 16

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数，σ_k 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的初等对称多项式（见第 15 讲 (14)），$p_k = \frac{\sigma_k}{C_n^k}$. 证明

$$p_1 \geqslant p_2^{\frac{1}{2}} \geqslant p_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant p_n^{\frac{1}{n}}, \tag{46}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

第 3 讲例 1

设 c, d 为正数, 并且

$$c + d \leqslant a, \tag{1}$$

$$c + d \leqslant b, \tag{2}$$

第 3 讲例 2

已知 $a+b+c>0, ax^2+bx+c=0$ 有实数根. 证明

$$\max\{a,b,c\} \geqslant \frac{4(a+b+c)}{9}. \tag{4}$$

第 3 讲例 3

已知 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0, \sum_{i=1}^{n} |b_i| = 1, \tag{9}$$

求证 $|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leqslant \frac{1}{2}(a_1 - a_n)$. (10)

第 3 讲例 4

设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ （约定 $B_0 = 0$ ），并且

$$B' \leqslant B_k \leqslant B(k = 1, 2, \ldots, n).$$

试证明阿贝尔不等式

$$a_1 B' \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant a_1 B. \tag{14}$$

第 3 讲例 5

设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, b_1 \geqslant a_1, b_1 b_2 \geqslant a_1 a_2, \cdots, b_1 b_2 \cdots b_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n.$

第 3 讲例 6

设 $a+b+c>0, ab+bc+ca>0, abc>0$. 求证: $a>0, b>0, c>0$.

第 3 讲例 7

设 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ ，求证：

$$| x^2 + 2xy - y^2 | \leqslant \sqrt{2}. \tag{20}$$

第 3 讲例 8

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 均为正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leqslant n - 1. \tag{24}$$

第 3 讲例 9

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负实数，

$$x = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right), \tag{29}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}.$$

求证：

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n}\left[(x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2\right] \\ &\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2n}\left[\left(x_1^2 - y^2\right)^2 + \cdots + \left(x_n^2 - y^2\right)^2\right]}. \end{aligned} \tag{30}$$

第 3 讲例 10

设 $a \leqslant a_i \leqslant A, b \leqslant b_i \leqslant B(i=1,2,\cdots,n)$, a, b 均为正数，则

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)$$

$$\leqslant \left(a_1 b_1+\cdots+a_n b_n\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2 . \tag{32}$$

第 3 讲例 11

设 $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, 0 < a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 并且 $\sum a_i = 1$. 则有康托罗维奇 (L. V. Kantorovich, 1912—1986) 不等式

$$\sum a_i b_i \cdot \sum \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{(b_1 + b_n)^2}{4 b_1 b_n}. \tag{35}$$

第 3 讲例 12

已知在 $|x| \leqslant 1$ 时，$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$. 证明：在 $|x| \leqslant 1$ 时，

$$| 2ax + b | \leqslant 4. \tag{36}$$

第 3 讲例 13

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数. 证明对任意的整数 $n \geqslant 2$ 及 (a,b) 中任意 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，均有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \tag{39}$$

第 4 讲例 1

设

$$a_n = 4 - \underbrace{\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{\ddots_{4-\frac{1}{4}}}}}}_{\text{共}n\text{个}4} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

第 4 讲例 2

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$ ，求证：

$$\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

第 4 讲例 3

(a) 设正数 a_1, a_2, a_3 满足

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4), \tag{2}$$

求证: a_1, a_2, a_3 一定是某个三角形的三条边长.

2. 设正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)^2 > (n-1)\left(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4\right), \tag{3}$$

其中 $n \geqslant 3$. 求证: 这 n 个数中的任意三个均可作为某个三角形的边长.

第 4 讲例 4

设 $a > 0$，则

$$\sqrt{a+\sqrt{2a+\sqrt{3a+\cdots+\sqrt{na}}}} < \sqrt{a}+1. \tag{7}$$

第 4 讲例 5

已知 $a_0 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2 (1 \leqslant k \leqslant n)$ ，证明

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1. \tag{9}$$

第 4 讲例 6

设 x 为正数, $[x]$ 表示 x 的整数部分. 证明:

$$[x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}\leqslant[nx]. \tag{12}$$

第 4 讲例 7

已知数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 = 2, r_n = r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + 1 (n = 2, 3, \cdots)$ ，自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1, \tag{16}$$

求证：$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}$. (17)

第 4 讲例 8

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为两两不等的自然数，并且所有的差 $|a_i - a_j|\,(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 互不相等. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{1}{6} n(n^2 + 5). \tag{21}$$

第 4 讲例 9

求 c 的最小值, 使得

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n} \tag{23}$$

对一切满足 $x_1+x_2+\cdots+x_i\leqslant x_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均成立.

第 4 讲例 10

证明: 对一切自然数 n,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2. \tag{24}$$

第 4 讲例 11

$b_1 = 100, b_{n+1} = 100^{b_n} (n = 1, 2, \cdots)$. $a_1 = 3, a_{n+1} = 3^{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$. 求满足 $b_m > a_{100}$ 的最小正整数 m.

第 4 讲例 12

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$. $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是这三角形中任意给定的点. 证明可以将这 n 个点重新编号, 使得

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 \leqslant AB^2. \tag{28}$$

第 4 讲例 13

设 $x_1, x_2, \cdots$ 为正实数，并且

$$x_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_n^j, n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{33}$$

第 5 讲例 1

求 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}(x \in (0,\pi))$ 的最小值.

第 5 讲例 2

证明: 在 $x > -1$ 时, 对于 $0 < \alpha < 1$, 有

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x, \tag{1}$$

而在 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时，(1) 中不等号反向（贝努里不等式）.

第 5 讲例 3

已知 $x, y, z \in R^+$. 求证:

$$\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)} \leqslant \frac{1}{5120}. \tag{4}$$

第 5 讲例 4

已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_1 = \frac{21}{16}, \tag{7}$$

$$2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}, n \geqslant 2. \tag{8}$$

设 m 为正整数, $m \geqslant 2$. 证明: 当 $n \leqslant m$ 时,

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left[m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right] < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}. \tag{9}$$

(2005 年中国数学奥林匹克试题, 朱华伟提供)

第 5 讲例 5

已知 a, b 为正数, 并且

$$a + b = 2, \tag{14}$$

求证: 在 $n > 1$ 时,

$$a^n + b^n \geqslant 2. \tag{15}$$

第 5 讲例 6

已知 a, b, c 为非负实数，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2 \geqslant 2.$$

第 5 讲例 7

已知 $x, y, z \in R^{+}$，且 $xyz = 1$。求证：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}. \tag{16}$$

第 5 讲例 8

已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+} \cup \{0\}$，且 $x+y+z=1$．求证:

$$\sum \left(\frac{20}{15-9x^2} - 9x^2 \right) \leqslant \frac{9}{7}.$$

第 5 讲例 9

给定正整数 n. 求最小的正数 λ，使对任何 $\theta_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)(i = 1, 2, \cdots, n)$，只要

$$\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 \cdot \cdots \cdot \tan\theta_n = 2^{\frac{n}{2}}, \tag{17}$$

就有

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n \leqslant \lambda. \tag{18}$$

(2003 年 CMO 试题, 黄玉民提供)

第 5 讲例 10

设 $a, b \in (0,1)$. 证明：

$$a^a + b^b \geqslant a^b + b^a. \tag{20}$$