不等式

LeyuDame

2026 年 6 月 7 日

目录

第 1 讲不等式与恒等式、二次形式与调整

第 2 讲重要不等式及其应用

第 3 讲不等式综合技巧

第 4 讲归纳法与不等式

第 5 讲导数与不等式

第 1 讲例 1

已知 $k > a > b > c > 0$, 求证:

$$k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) > 0. \tag{1}$$

第 1 讲例 1 解答

已知条件告诉我们 $k-a>0, k-b>0, k-c>0$. 而 (1) 的左边使我们想到 (以 a, b, c 为根的) 三次方程的韦达定理 (或 a, b, c 的初等对称函数). 于是有

$$\begin{aligned} & 0<(k-a)(k-b)(k-c) \\ & =k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc \\ & <k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k. \end{aligned}$$

从而 (1) 式成立.

第 1 讲例 2

已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$，求证：

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4\leqslant 6. \tag{3}$$

第 1 讲例 2 解答

已知条件表明四次式 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 等于 1.(3) 式的左端也是四次式. 我们希望挖掘出这两个四次式的关系. 由于 $(a+b)^4$ 中 a 的奇次项在 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 中不出现，它们需要与 $(a-b)^4$ 中相应的项抵消. 所以，应当利用恒等式

$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4+\\&(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\\&=6\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.\end{aligned}\tag{4}$$

由 (4) 立即得到 (3).

第 1 讲例 3

证明柯西不等式

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right). \qquad (5)$$

第 1 讲例 3 解答

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\cdots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2, \tag{6}$$

从而 (5) 式成立.

注 (i) (6) 称为拉格朗日恒等式.

(ii) 证明恒等式 (4) 或 (6) 成立，不必将每个括号展开后得出的项一一写出. 应当利用观察与心算，注意那些未曾抵消的项，更确切地说，只需要注意一两个代表项 ((4) 中的 a^4, a^2b^2 ，(6) 中的 $a_i^2b_j^2, -2a_ib_ia_jb_j$).

3. (5) 的证法很多, 这里只介绍利用恒等式的一种.

第 1 讲例 4

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1, a_2, a_3 与 b_1, b_2, b_3，面积分别为 $\triangle_1, \triangle_2$. 又记

$$H = a_1^2\left(-b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) + a_2^2\left(b_1^2 - b_2^2 + b_3^2\right) + a_3^2\left(b_1^2 + b_2^2 - b_3^2\right).$$

则对于 $\lambda \in \left\{\frac{b_1^2}{a_1^2}, \frac{b_2^2}{a_2^2}, \frac{b_3^2}{a_3^2}\right\}$,

$$H \geqslant 8\left(\lambda\triangle_1^2 + \frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right). \tag{7}$$

第 1 讲例 4 解答

关于三角形的面积, 我们有海伦 (Heron of Alexandria, 约 1 世纪)-秦九韶 (约 1202—约 1261) 公式

$$16\triangle_1^2 = 2a_1^2a_2^2 + 2a_2^2a_3^2 + 2a_3^2a_1^2 - a_1^4 - a_2^4 - a_3^4,$$

$$16\triangle_2^2 = 2b_1^2b_2^2 + 2b_2^2b_3^2 + 2b_3^2b_1^2 - b_1^4 - b_2^4 - b_3^4.$$

记

$$D_i = \sqrt{\lambda}a_i^2 - \sqrt{\frac{1}{\lambda}}b_i^2 (i = 1, 2, 3),$$

则有恒等式

$$H - 8\left(\lambda\triangle_1^2 + \frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right) = \frac{1}{2}(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) - (D_1D_2 + D_2D_3 + D_3D_1). \qquad (8)$$

第 1 讲例 4 解答

当 $\lambda = \frac{b_1^2}{a_1^2}$ 时，$D_1 = 0, (8)$ 式成为

$$H - 8\left(\lambda \triangle_1^2 + \frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right) = \frac{1}{2}(D_2 - D_3)^2.$$

于是 (7) 式成立. 同理 (7) 式对 $\lambda = \frac{b_2^2}{a_2^2}$ 或 $\frac{b_3^2}{a_3^2}$ 成立.

第 1 讲例 5

方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根 α,β,γ 均为实数，$a^2=2b+2$. 证明

$$|\ a-c\ |\leqslant 2. \tag{9}$$

第 1 讲例 5 解答

由韦达定理，

$$a^2 - 2b = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

$$| a - c |^2 = (\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma)^2.$$

我们有恒等式

$$(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)^2 = 2(\alpha\beta-1)(\beta\gamma-1)(\gamma\alpha-1)+2-\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \quad (10)$$

由已知 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2$ ，从而 $\alpha\beta \leqslant 1, \beta\gamma \leqslant 1, \gamma\alpha \leqslant 1$. 这样，(10) 导出 $(\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma)^2 \leqslant 4$ ，即 (9) 式成立.

第 1 讲例 6

$\triangle ABC$ 的边长为 a, b, c，周长为 2. 求证

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2. \tag{11}$$

第 1 讲例 6 解答

我们有恒等式 (可与例 1 比较)

$$\begin{aligned} & 2(1-a)(1-b)(1-c) \\ & = 2-2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-2abc \\ & = 2-2(a+b+c)+(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2+2abc\right). \end{aligned} \tag{12}$$

由于 $a+b+c=2$ ，所以 $(a+b+c)^2=2(a+b+c)$ ，又三角形的每条边小于周长的一半, 所以 $a<1, b<1, c<1$.(12) 左边为正, 因此 (11) 成立.
又解先将 (11) 改写为三次齐次式

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc<\frac{1}{4}(a+b+c)^3, \tag{13}$$

即 $\sum a^3-\sum a^2(b+c)+2abc<0$,
亦即 $\prod(b+c-a)>0$.
最后一个不等式显然成立.

第 1 讲例 7

证明 $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

第 1 讲例 7 解答

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$$

$$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\geqslant 0.$$

第 1 讲例 8

A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角. 求证对任意实数 x, y, z,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geqslant 0. \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &= \left(x^2 - 2xy\cos C - 2zx\cos B\right) + y^2 + z^2 - 2yz\cos A \\ &= (x - y\cos C - z\cos B)^2 + y^2\sin^2 C + z^2\sin^2 B - 2yz\cos A - \\ &\quad 2yz\cos B\cos C \\ &= (x - y\cos C - z\cos B)^2 + (y\sin C - z\sin B)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

第 1 讲例 8 解答

$x^2+y^2+z^2-2xy\cos C-2yz\cos A-2zx\cos B$

最后一步利用了

$$\cos A=\cos(\pi-B-C)=-\cos(B+C)=\sin B\sin C-\cos B\cos C.$$

由 (15) 立即得到 (14).

第 1 讲例 9

λ, μ, ν 为任意实数, a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的边, $\triangle$ 为这三角形的面积, 证明

$$\left(\lambda a^2 + \mu b^2 + \nu c^2\right)^2 \geqslant 16(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\triangle^2, \tag{18}$$

当且仅当 $\lambda : \mu : \nu = (b^2 + c^2 - a^2) : (c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)$ 时等号成立.

第 1 讲例 9 解答

λ, μ, ν 的二次形式

$$
\begin{aligned}
&\left(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2\right)^2-16(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\triangle^2\\
&=a^4\lambda^2+2\lambda\left[\mu\left(a^2b^2-8\triangle^2\right)+\nu\left(a^2c^2-8\triangle^2\right)\right]+\left[\mu^2b^4+\nu^2c^4+2\mu\nu\left(b^2c^2-\right.\right.\\
&\left.\left.8\triangle^2\right)\right]\\
&=a^4\lambda^2+2\lambda\left[\mu a^2b^2\cos 2C+\nu a^2c^2\cos 2B\right]+\left[\mu^2b^4+\nu^2c^4+2\mu\nu b^2c^2\cos 2A\right]\\
&=\left(a^2\lambda+b^2\mu\cos 2C+c^2\nu\cos 2B\right)^2+\left(b^2\mu\sin 2C-c^2\nu\sin 2B\right)^2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

而 $\frac{c^2\sin 2B}{b^2\sin 2C}=\frac{c^2\sin B\cos B}{b^2\sin C\cos C}=\frac{c\cos B}{b\cos C}=\frac{c^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$，所以 (18) 中的等号当且仅当 $\lambda:\mu:\nu=(b^2+c^2-a^2):(c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$ 时成立.

第 1 讲例 10

a, b, c 为正实数, 求证

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}. \tag{20}$$

第 1 讲例 10 解答

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，由于 (20) 是齐次的，可以设 $c = 1$ （否则取 k，使 $kc = 1$，并用 ka, kb, kc 代替 a, b, c）。显然 $a \geqslant \frac{a+b+c}{3}$，所以

$$a^{a-\frac{a+b+c}{3}} \geqslant b^{a-\frac{a+b+c}{3}}. \tag{21}$$

因此，(20) 可从 $b^a b^b \geqslant (b^2)^{\frac{a+b+c}{3}}$ (22)
推出 (将 (21) 与 (22) 相乘即得 (20))。由于 $a + b \geqslant \frac{2(a+b+c)}{3}$，(22) 显然成立，所以 (20) 成立.

第 1 讲例 11

设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, $m > 0$, 求证

$$\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{c}{c+m}. \tag{23}$$

第 1 讲例 11 解答

我们将 c 增大到 $c = a + b$. 由于 $\frac{c}{c+m} = 1 - \frac{m}{c+m}$ 随 c 增大, 所以不等式

$$\frac{a}{a+m} + \frac{b}{b+m} > \frac{a+b}{a+b+m} \tag{24}$$

比 (23) 强 ((24) 可以推出 (23)).
显然 $\frac{a}{a+m} > \frac{a}{a+b+m}$, $\frac{b}{b+m} > \frac{b}{a+b+m}$.
所以 (24) 成立, 从而 (23) 成立.
调整后所得的不等式, 必须是正确的, 必须不比原不等式弱.

第 1 讲例 12

已知 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$ 满足

$$y_2 \geqslant y_1 \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2, \tag{25}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant y_1 + y_2, \tag{26}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \geqslant y_1 y_2. \tag{27}$$

第 1 讲例 12 解答

首先, 保持和 $y_1 + y_2$ 不变, 将 y_1 调大 (这时 y_2 减少) 直至 y_1, y_2 均等于 $y\left(= \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 由于 $y_1 y_2$ 在这过程中增大, 所以只需证明

$$x_1 x_2 x_3 x_4 \geqslant y^2. \tag{28}$$

这时 (25)，(26) 成为 $y \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2$, (29)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 2y. \tag{30}$$

我们分三种情况讨论：

1. $y \leqslant 4$.

显然 $x_1 x_2 x_3 x_4 \geqslant 2^4 \geqslant y^2$

2. $4 < y \leqslant 6$.

第 1 讲例 12 解答

保持和 x_1+x_4, x_2+x_3 不变，将 x_1, x_2 调整为 2. 然后保持和 x_3+x_4 不变，将 x_3 调整为 2. 由于积 $x_1x_2x_3x_4$ 经上述调整减少，只需证明

$$2^3 \cdot x_4 \geqslant y^2. \tag{31}$$

由于 $2^3 \cdot x_4 \geqslant 8(2y-6)$

$$\begin{aligned} &= 16y-48 = y^2-\left(y^2-16y+48\right) = y^2-(y-4)(y-12) \\ &\geqslant y^2, \end{aligned}$$

显然得证.

3. y > 6.

第 1 讲例 12 解答

保持和 x_1+x_4, x_2+x_3 不变. 如果这两个和均大于等于 $y+2$, 将 x_4, x_3 调为 y , 这时 (28) 显然成立. 如果只有 $x_1+x_4 \geqslant y+2 (x_2+x_3 \geqslant y+2$ 与此类似), 将 x_4 调为 y, x_2 调为 2, 然后保持和 x_1+x_3 不变, 将 x_1 调为 2; 如果 x_1+x_4, x_2+x_3 均小于 $y+2$, 将 x_1, x_2 调为 2, 然后保持和 x_3+x_4 不变, 将其中较大的调为 y . 总之,

$$x_1x_2x_3x_4 \geqslant 2^2y(y-4) = 4y^2-16y > y^2.$$

注 (i) 在调整的过程中, 可以看到 “变化”, 可以看到 “运动”, 所以, 调整法比其他方法显得生动. 但一定要注意严密, 注意叙述. 严密, 就是不能出现疏漏. 叙述应当清楚, 含混不清的地方往往就是出现疏漏的地方.

(ii) 两个正数 a, b 的和为一定时，它们的积 $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]$ 随着差 $|a-b|$ 的增大而减少。这就是例 12 中种种调整的根据。

对于三角不等式, 不少人感到棘手. 据了解, 有两个原因: 第一, 没有掌握一种普遍的解法, 所以遇到题目不知如何下手, 看到解答也只知其然, 不知其所以然; 第二, 有些书籍或刊物上介绍的解答, 用到不少其他的知识, 这就增加了问题的难度.

调整法, 是证明三角不等式的常用方法, 简单而且容易依循.

第 1 讲例 13

证明在 $\triangle ABC$ 中，

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{32}$$

第 1 讲例 13 解答

首先注意在 $A=B=C=60^\circ$ 时，(32) 中等号成立. 因而要证的不等式就是

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant \sin 60^\circ+\sin 60^\circ+\sin 60^\circ. \tag{33}$$

不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$. 于是 $A\geqslant 60^\circ, C\leqslant 60^\circ$. 保持和 $A+C$ 不变 (即 B 不变), 使得 A, C 中一个被调整为 60°，另一个为 $A+C-60^\circ$. 这时 $A-C\geqslant |A+C-120^\circ|$，

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin C=2\sin\tfrac{A+C}{2}\cos\tfrac{A-C}{2}\\&\leqslant 2\sin\tfrac{A+C}{2}\cos\tfrac{(A+C-60^\circ)-60^\circ}{2}\\&=\sin(A+C-60^\circ)+\sin 60^\circ,\end{aligned}$$

即 $\sin A+\sin C$ 经调整后增大. 我们只需证明

$$\sin(A+C-60^\circ)+\sin B\leqslant \sin 60^\circ+\sin 60^\circ. \tag{34}$$

第 1 讲例 13 解答

(34) 的左边 $= \sin(120^\circ - B) + \sin B = 2\sin 60^\circ \cos(60^\circ - B) \leqslant 2\sin 60^\circ =$ 右边. 于是 (34)，(32) 成立.

(34) 的证明就是保持和 $B + (A + C) - 60^\circ = 120^\circ$ 不变, 将 B 调为 60° 时, $\sin(A + C - 60^\circ) + \sin B$ 增大.

第 2 讲例 1

设有两个有序数组 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 及 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.
对于 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$,

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad (\text{同序的和})$$

$$\geqslant a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n} \quad (\text{乱序的和})$$

$$\geqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \quad (\text{逆序的和}).$$

第 2 讲例 1 解答

对于任意 $k, h \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$(a_1 b_1 + a_k b_h) - (a_1 b_h + a_k b_1) = (a_1 - a_k)(b_1 - b_h) \geqslant 0.$$

所以, 我们可将 $a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n}$ 中第一项的因数 b_{i_1} 与 b_1 对调, 和不会减少. 同样, 可将第二项调为 $a_2 b_2, \cdots$, 依此类推即得例 1 中第一个不等式. 同样可证另一个不等式.

例 1 就是排序不等式, 也称为排序原理.

第 2 讲例 2

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相等的自然数, 求证:

$$a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \cdots + \frac{a_n^2}{n} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

第 2 讲例 2 解答

使用排序不等式需将每一项适当地分成两个因数的积. 数列 $\{a_i^2\}$ 的大小次序与 $\{a_i\}$ 相同、与 $\{\frac{1}{a_i}\}$ 相反. 所以由排序不等式

$$\sum a_i = \sum \frac{a_i^2}{a_i} \leqslant \sum \frac{a_i^2}{a_{j_i}}, \tag{2}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，满足

$$a_{j_1} < a_{j_2} < \cdots < a_{j_n}. \tag{3}$$

由于 (3) 中的数都是自然数, $a_{j_i} \geqslant i$, 从而由 (2) 得 $\sum a_i \leqslant \sum \frac{a_i^2}{i}$.

第 2 讲例 3

设 a, b, c 为正数, 证明:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}. \tag{4}$$

第 2 讲例 3 解答

由对称性, 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$. 这时 $\frac{1}{b+c} \geqslant \frac{1}{a+c} \geqslant \frac{1}{a+b}$.
所以由排序不等式, 得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}. \tag{5}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}. \tag{6}$$

将 (5)，(6) 相加即得 (4).

第 2 讲例 4

设 s, t 为正数, n 为自然数. 证明:

$$s^{n+1} + nt^{n+1} \geqslant (n+1)t^n s. \tag{7}$$

第 2 讲例 4 解答

由于 s, t 与 $s^k, t^k (1 \leqslant k \leqslant n)$ 同序, 所以

$$(s-t)(s^k - t^k) \geqslant 0. \tag{8}$$

于是

$$\begin{aligned}
& s^{n+1} + nt^{n+1} - (n+1)t^n s \\
&= s\left(s^n - t^n\right) - nt^n(s-t) \\
&= (s-t)\left[s\left(s^{n-1} + s^{n-2}t + \cdots + t^{n-1}\right) - nt^n\right] \\
&= (s-t)\left[\left(s^n - t^n\right) + \left(s^{n-1} - t^{n-1}\right)t + \cdots + (s-t)t^{n-1}\right] \\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

即 (7) 式成立.

排序不等式的适用对象是代数和, 其中每一个加项都可以表示为两个因式的积. 例 4 虽然没有直接援引排序不等式, 但用到同样的思想 (即 (8)).

注例 4 也可以直接利用排序不等式, 即将数组 $\overbrace{s, t, t, \cdots, t}^{n \text{ terms}}$ 反复自乘 $n+1$ 次. 在每次均用 s 乘 s 的幂时所得各项之和最大, 每次均用 s 乘 t 的幂时所得各项之和最小.

第 2 讲例 5

设 $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_n$. 求 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$ ，使得 “距离” $d = (p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2 + \cdots + (p_n - x_n)^2$ 为最小.

第 2 讲例 5 解答

设 $p=\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots+p_n)$. 很自然地猜测在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=p$ 时, d 为最小. 即 $(p_1-x_1)^2+(p_2-x_2)^2+\cdots+(p_n-x_n)^2$

$$\geqslant (p_1-p)^2+(p_2-p)^2+\cdots+(p_n-p)^2. \tag{9}$$

不妨设 $p=0$，否则用 p_i-p 代替 p_i, x_i-p 代替 x_i . 因此，只需证明

$$\sum (p_i-x_i)^2 \geqslant \sum p_i^2. \tag{10}$$

(10) 左边 $=\sum p_i^2+\sum x_i^2-2\sum x_ip_i \geqslant \sum p_i^2-2\sum x_ip_i$ ，只需证明

$$\sum x_ip_i \leqslant 0. \tag{11}$$

由于 $\{p_i\}$ 与 $\{x_i\}$ 逆序, 所以对 1,2, $\cdots$,n 的任一排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 均有

$$\sum x_ip_i \leqslant \sum p_ix_{j_i}. \tag{12}$$

第 2 讲例 5 解答

逐次取 $j_i = i, i+1, \cdots, n, 1, \cdots, i-1 (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，然后将所得的 n 个形如 (12) 的不等式相加，得

$$n \sum x_i p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j_i=1}^{n} x_{j_i} = (\sum_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum_{i=1}^{n} p_i) = 0$$

(最后一步是由于 $p = 0$)，这就是 (11). 因此 (10)，(9) 均成立.
将若干个形如 (12) 的不等式相加以产生所需要的结果, 是例 5 的关键. 这一方法在例 3 中实际上已经用过.
用这个方法, 不难得出.

第 2 讲例 6

如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ ，那么

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \sum a_i \cdot \sum b_i, \tag{13}$$

它称为契比雪夫 (P. Y. Chebyshev, 1821—1894) 不等式. 在 $\{a_i\}$ 或 $\{b_i\}$ 中恰有一个改为相反的顺序时,(13) 的 "$\geqslant$" 也改为 "$\leqslant$".
算术-几何平均不等式也是经常使用的不等式 (简称为 A-G 不等式):
设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数，则

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}. \tag{14}$$

$n = 2$ 或 3 的情况, 在中学里尤为常见.

第 2 讲例 6 解答

（本例在讲义中未给出单独证明。）

第 2 讲例 7

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 为非负实数，求证

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}\right) \\ \leqslant & (n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

第 2 讲例 7 解答

$$(n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\right)-$$

$$n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$$

$$=a_{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}+n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

设法化去根号. 为此, 设 $a_1a_2\cdots a_n=t^{n(n+1)}$, $a_{n+1}=s^{n+1}$, $s,t\geqslant 0$, 则上式 $=s^{n+1}-(n+1)t^ns+nt^{n+1}\geqslant 0$.

最后一步是根据 (7).

由 (15)，我们得到

$$\begin{aligned}&n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)\\&\geqslant\cdots\geqslant 3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\right)\\&\geqslant 2\left(\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

这是 A-G 不等式的一种证明 (据统计,A-G 不等式的证明有几十种).

第 2 讲例 8

设 a, b, c 都是正数. 证明

$$abc \geqslant (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \tag{16}$$

第 2 讲例 8 解答

如果 $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ 中有负数，设 $a+b-c<0$ ，那么 $c>a+b, b+c-a$ 与 $c+a-b$ 均为正数。(16) 右边为负，结论显然成立.
设 $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ 均非负. 由 A-G 不等式，

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leqslant \frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2} = b. \tag{17}$$

同样有 (注意轮换性)

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leqslant c, \tag{18}$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leqslant a. \tag{19}$$

将 (17)，(18)，(19) 三式相乘即得 (16).

第 2 讲例 9

已知 a, a' 为正，并且行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{20}$$

求证行列式 $\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix} \leqslant 0$, (21)

这里行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ 即表达式 $ac - b^2$

第 2 讲例 9 解答

记 $k=\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

因为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix} = (a-a')(c-c') - (b-b')^2 \\ &= 2k - ac' - a'c + 2bb', \end{aligned} \tag{22}$$

而由 A-G 不等式有 $ac' + a'c \geqslant 2\sqrt{aa'cc'}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{(k+b^2)(k+b'^2)} \\ &= 2\sqrt{k^2 + b^2b'^2 + k(b^2+b'^2)} \\ &\geqslant 2\sqrt{k^2 + b^2b'^2 + 2kbb'} \\ &= 2k + 2bb'. \end{aligned} \tag{23}$$

由 (22)，(23) 导出 (21).

第 2 讲例 10

设 $x_i \geqslant 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 证明樊畴 (1914—2010) 不等式

$$\frac{\prod (x_i - 1)}{\left(\sum (x_i - 1)\right)^n} \leqslant \frac{\prod x_i}{\left(\sum x_i\right)^n}. \tag{24}$$

这里 $\prod$ 是连乘符号，$\prod x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$

第 2 讲例 10 解答

(24) 等价于 $\left(\frac{\prod(x_i-1)}{\prod x_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum(x_i-1)}{\sum x_i}$. (25)

由 A-G 不等式，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\prod(x_i-1)}{\prod x_i}\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\prod \frac{x_i-1}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}} \\ \leqslant \frac{1}{n}\sum \frac{x_i-1}{x_i} &= 1-\frac{1}{n}\sum \frac{1}{x_i}.\end{aligned} \tag{26}$$

而

$$\frac{\sum(x_i-1)}{\sum x_i} = \frac{\sum x_i - n}{\sum x_i} = 1-\frac{n}{\sum x_i}. \tag{27}$$

所以 (25) 可由 (26)，(27) 及不等式

$$\frac{1}{n}\sum \frac{1}{x_i} \geqslant \frac{n}{\sum x_i} \tag{28}$$

推出.

(28) 等价于 $\sum x_i \cdot \sum \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. (29)

第 2 讲例 10 解答

这个不等式不难从 A-G 不等式导出

$$\sum x_i \cdot \sum \frac{1}{x_i} \geqslant n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{x_n}} = n^2.$$

第 2 讲例 11

设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，并且

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1, \tag{30}$$

求证：

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i} \right)^2 \geqslant \frac{(n^2+1)^2}{n}. \tag{31}$$

第 2 讲例 11 解答

将 (31) 的两边展开并化简成

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2} \geqslant \frac{1}{n} + n^3. \tag{32}$$

由柯西不等式及条件 (30)，得 $\sum 1^2 \cdot \sum a_i^2 \geqslant (\sum a_i)^2 = 1$. 所以

$$\sum a_i^2 \geqslant \frac{1}{n}. \tag{33}$$

同样 $\sum 1^2 \cdot \sum \frac{1}{a_i^2} \geqslant \left(\sum \frac{1}{a_i}\right)^2$. (34)

而由条件 (30) 及不等式 (29)，得 $\sum \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$. (35)

由 (34)，(35) 导出 $\sum \frac{1}{a_i^2} \geqslant n^3$. (36)

由 (33)，(36) 导出 (32)，(31).

第 2 讲例 12

设 $l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n = 1$，这里 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为已知数。求 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 的最小值。

第 2 讲例 12 解答

$$(l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n)^2$$

$$\leqslant \left(l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right),$$

所以 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{l_1^2+l_2^2+\cdots+l_n^2}$,
当且仅当 $x_i = l_i(l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2)^{-1}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时等号成立.
注本题的几何意义是 n 维空间中, 原点到超平面的垂直距离是连接原点与这超平面上任一点的线段中最短的.

第 2 讲例 13

证明关于两个三角形的匹窦不等式

$$a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)+b^2(c_1^2+a_1^2-b_1^2)+c^2(a_1^2+b_1^2-c_1^2)\geqslant 16\triangle\triangle_1,(37)$$

这里 $a,b,c,\triangle$ 及 $a_1,b_1,c_1,\triangle_1$ 分别为两个三角形的边长与面积.

第 2 讲例 13 解答

这个不等式在第 1 讲中已经出现过 (第 1 讲 (19)). 宁波大学陈计先生利用柯西不等式给出如下简单优雅的证明:

$$
\begin{aligned}
&16\triangle\triangle_1 + 2a^2a_1^2 + 2b^2b_1^2 + 2c^2c_1^2 \\
&\leqslant \left(16\triangle_1^2 + 2a_1^4 + 2b_1^4 + 2c_1^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(16\triangle^2 + 2a^4 + 2b^4 + 2c^4\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right),
\end{aligned}
$$

所以 $16\triangle\triangle_1 \leqslant a^2(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2) + b^2(c_1^2 + a_1^2 - b_1^2) + c^2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)$.
类似于例 13, 一些辅助的恒等变形, 在不等式的证明中常常需要.

第 2 讲例 14

设 $n \geqslant 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数，并且

$$\sum x_i = 1, \tag{38}$$

求证 $\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$. (39)

第 2 讲例 14 解答

由条件 (38) 及柯西不等式, 得

$$\sum \sqrt{x_i} \leqslant (\sum 1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum x_i\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}. \tag{40}$$

由于 $\sum(1-x_i) = n - \sum x_i = n-1$,
结合柯西不等式得

$$\sum \sqrt{1-x_i} \leqslant (\sum 1)^{\frac{1}{2}} \left[\sum(1-x_i)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n(n-1)}. \tag{41}$$

于是由 (29)(或直接用柯西不等式) 得

$$\sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{n^2}{\sum \sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{42}$$

第 2 讲例 14 解答

由 (40)，(41)，(42) 推出

$$\begin{aligned}
&\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\
&\geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \geqslant \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}.
\end{aligned}$$

第 2 讲例 15

正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$ 的最小值.

第 2 讲例 15 解答

容易猜到 $x=y=z=\sqrt{\frac{1}{3}}$ 时, $\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}$ 取得最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 为了证明这一点, 首先利用柯西不等式得

$$\sum \frac{x}{1-x^2}\cdot\sum x^3(1-x^2)\geqslant\sum x^2=1. \tag{43}$$

所以只需要证明 $\sum x^3(1-x^2)\leqslant\frac{2}{3\sqrt{3}}$ (44)
(这种 “去分母” 的方法在其他问题中也会用到, 如习题 2 第 2 题).
(44) 等价于 $\frac{2}{3\sqrt{3}}+\sum x^5\geqslant\sum x^3$. (45)
而由 A-G 不等式

$$\frac{2x^2}{3\sqrt{3}}+x^5\geqslant 3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x^2}{3\sqrt{3}}\right)x^5}=x^3,$$

所以 (45) 成立, 证毕.

第 2 讲例 15 解答

辅助的恒等变形似乎平常, 实际做起来却并不容易. 尝试一下例 15 就会有较深的体会 (另一种解法见习题 2 第 12 题).

柯西不等式中 $\sum a_ib_i$ 的项 a_ib_i 如何拆成两个因式 a_i 与 b_i 之积，可以说是应用这个不等式的主要技巧（在例 15 的 (44）中，我们将 $\sum x^2$ 中的 x^2 表示为 $\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ 与 $\sqrt{x^3(1-x^2)}$ 的积). 正因为 a_ib_i 可以按照我们的需要加以分解, 柯西不等式的应用更为广泛.

第 2 讲例 16

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数，σ_k 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的初等对称多项式（见第 15 讲 (14)），$p_k = \frac{\sigma_k}{C_n^k}$. 证明

$$p_1 \geqslant p_2^{\frac{1}{2}} \geqslant p_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant p_n^{\frac{1}{n}}, \tag{46}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

第 2 讲例 16 解答

首先证明 $p_k^2 \geqslant p_{k-1}p_{k+1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, (47)
当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.
对 n 用归纳法. 假设对 n-1 个数相应结论成立, 相应的量记为 σ'_k, p'_k , 则

$$\sigma_k = \sigma'_k + a_n\sigma'_{k-1}, p_k = \frac{n-k}{n}p'_k + \frac{k}{n}a_n p'_{k-1},$$

从而 $n^2(p_k^2 - p_{k+1}p_{k-1}) = A + Ba_n + Ca_n^2,$
其中 $A = (n-k)^2 p_k^{'2} - [(n-k)^2 - 1]p'_{k+1}p'_{k-1} \geqslant p_k^{'2}$

$$B = 2k(n-k)p'_{k-1}p'_k - (n-k+1)(k+1)p'_{k-1}p'_k -$$
$$(n-k-1)(k-1)p'_{k-2}p'_{k+1},$$
$$C = k^2 p_{k-1}^{'2} - (k^2-1)p'_{k-2}p'_k \geqslant p_{k-1}^{'2}.$$

第 2 讲例 16 解答

因为 $p'_{k-2}p'_{k+1} \leqslant \frac{p'^2_{k-1}}{p'_k} \cdot p'_{k+1} \leqslant \frac{p'_{k-1}}{p'_k} \cdot p'^2_k = p'_{k-1}p'_k$，所以 $B \geqslant -2p'_{k-1}p'_k$. 于是

$$n^2(p_k^2 - p_{k-1}p_{k+1} \geqslant (p'_{k-1}a_n - p'_k)^2 \geqslant 0.$$

等号仅在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$ 并且 $a_n = \frac{p'_k}{p'_{k-1}}$ 时成立，即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

由 (47) 可得

$$(p_0p_2)\,(p_1p_3)^2\,(p_2p_4)^3 \cdots (p_{k-1}p_{k+1})^k \leqslant p_1^2p_2^4p_3^6 \cdots p_k^{2k},$$

所以 $p_{k+1}^k \leqslant p_k^{k+1}$，

即 (46) 成立.

(47) 是牛顿得出的, 实际上对实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都成立 (证明仅需稍作修改).(46) 称为马克劳林 (Maclaurin,1698—1746) 不等式.

关于归纳法与不等式, 参见第 4 讲.

第 3 讲例 1

设 c, d 为正数, 并且

$$c + d \leqslant a, \tag{1}$$

$$c + d \leqslant b, \tag{2}$$

$ca + db \leqslant ab.$ (3)

第 3 讲例 1 解答

这道题, 如果说有困难的话, 就在于将它想得过于困难 (甚至有人搬用柯西不等式).
其实, 这是一个非常简单的不等式 (参见第 1 讲例 5).
设 $a \leqslant b$ ，则由于 c, d, a, b 均为正数，$ca + db \leqslant (c + d)b \leqslant ab$.

第 3 讲例 2

已知 $a+b+c>0, ax^2+bx+c=0$ 有实数根. 证明

$$\max\{a,b,c\} \geqslant \frac{4(a+b+c)}{9}. \tag{4}$$

第 3 讲例 2 解答

首先, 我们可以设

$$a+b+c=1, \tag{5}$$

否则用 $\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$ 代替 $a, b, c.$ 这样，只需证明

$$\max\{a, b, c\} \geqslant \frac{4}{9}. \tag{6}$$

分情况来讨论：

1. 如果 $b \geqslant \frac{4}{9}$ ，(6) 已经成立.
   (ii) 如果 $b < \frac{4}{9}$ ，由已知 $ax^2+bx+c=0$ 有实根得 $\left(\frac{4}{9}\right)^2 > b^2 \geqslant 4ac$

第 3 讲例 2 解答

即 $\frac{4}{81} \geqslant ac$. (7)
又 $a+c=1-b>1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$, (8)
结合 (7)，(8) 得 $\left(\frac{5}{9}-c\right)c<ac\leqslant\frac{4}{81}$ ，
即 $c^2-\frac{5}{9}c+\frac{4}{81}=(c-\frac{1}{9})(c-\frac{4}{9})>0$.
从而 $c>\frac{4}{9}$ 或 $c<\frac{1}{9}$.
在 $c<\frac{1}{9}$ 时，由 (8) 得 $a>\frac{5}{9}-c>\frac{4}{9}$.
因此 (6) 成立.

第 3 讲例 3

已知 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 0, \sum_{i=1}^{n} |b_i| = 1, \tag{9}$$

求证 $|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leqslant \frac{1}{2}(a_1 - a_n)$. (10)

第 3 讲例 3 解答

不等式中有负数出现是一件讨厌的事, 你必须小心翼翼, 防止在乘以负数时忘记改变不等号的方向. 如果可能的话, 我们希望将负数换为正数, 或者将正数、负数分开处理.

a_n （甚至 a_1 ）未必为正数。但我们可以将 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 换成 $a_1 + M, a_2 + M, \cdots, a_n + M$ ，这里 M 是一个足够大（大于等于 $-a_n$ ）的数，使得所有 $a_i + M$ 成为非负数。结合 (9) 的第一个等式，得 $\sum_{i=1}^{n}(a_i + M)b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + M\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ 。又有（平移不改变距离）$(a_1 + M) - (a_n + M) = a_1 - a_n$ ，所以将 a_i 换为 $a_i + M(i = 1, 2, \cdots, n)$ 对 (10) 并无影响，我们不妨假定 $a_n = 0$ （即取 $M = -a_n$ ）。

又可以假定 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant 0$. 否则将 b_i 换成 $-b_i(1 \leqslant i \leqslant n)$. 于是只需证

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{2} a_1. \tag{11}$$

第 3 讲例 3 解答

将 b_i 中正数, 负数分开. 记

$$P=\sum_{b_i\geqslant 0} b_i, N=-\sum_{b_i<0} b_i,$$

则 (9) 即

$$P-N=0, P+N=1. \tag{12}$$

从而

$$P=N=\frac{1}{2}. \tag{13}$$

于是 $\sum a_ib_i=\sum_{b_i>0} a_ib_i+\sum_{b_i<0} a_ib_i\leqslant a_1\sum_{b_i<0} b_i=a_1P=\frac{1}{2}a_1$.
注平移 (即将 a_i 变为 a_i+M), 将正、负部分分开都是惯用的手法. 本例中的 M 可以随意选择, 取 $M=-a_n$ 较为简单.
处理 $\sum a_ib_i$ 的另一种方法是阿贝尔 (N. H. Abel, 1802—1829) 求和法.

第 3 讲例 4

设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ （约定 $B_0 = 0$ ），并且

$$B' \leqslant B_k \leqslant B(k = 1, 2, \ldots, n).$$

试证明阿贝尔不等式

$$a_1 B' \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant a_1 B. \tag{14}$$

第 3 讲例 4 解答

$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1})B_i + a_n B_n$, (15)

所以 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant B\left[\sum_{i=1}^{n-1}(a_i - a_{i+1}) + a_n\right] = a_1 B.$

同样可证 (14) 的另一半.

(15) 就是著名的阿贝尔求和法.

在例 3 中, $B = P = N = \frac{1}{2}$, $B' = -\frac{1}{2}$, 所以由 (14) 立即得到 (10) (先作平移, (14) 中的 a_1 即 (10) 中 $a_1 - a_n$).

类似地，取 $b_k = \sin kx (0 < x < 2\pi$ ，则易知 $\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$. 所以由阿贝尔不等式 (14) 得 $\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(m+1)\sin \frac{x}{2}}$.

第 3 讲例 5

设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, b_1 \geqslant a_1, b_1 b_2 \geqslant a_1 a_2, \cdots, b_1 b_2 \cdots b_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n$.
$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. (16)

第 3 讲例 5 解答

令 $c_i = \frac{b_i}{a_i} (1 \leqslant i \leqslant n)$ ，则

$$c_1 \geqslant 1, c_1 c_2 \geqslant 1, \ldots, c_1 c_2 \ldots c_n \geqslant 1. \tag{17}$$

要证明的 (16) 等价于

$$(c_1 - 1)\, a_1 + (c_2 - 1)\, a_2 + \cdots + (c_n - 1)\, a_n \geqslant 0. \tag{18}$$

由 A-G 不等式及条件 (17) 得

$$(c_1 - 1) + (c_2 - 1) + \cdots + (c_k - 1) \geqslant k \sqrt[k]{c_1 c_2 \cdots c_k} - k \geqslant 0.$$

在阿贝尔不等式 (14) 中取 $B' = 0$ 即得 (18).

第 3 讲例 6

设 $a+b+c>0, ab+bc+ca>0, abc>0$. 求证: $a>0, b>0, c>0$.

第 3 讲例 6 解答

已知条件使我们联想到三次方程 (第 1 讲例 1 也是如此)

$$\begin{aligned} &x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc \\ &\equiv (x-a)(x-b)(x-c)=0 \end{aligned} \tag{19}$$

(这里 "$\equiv$" 表示恒等), a, b, c 是它的三个根. 而在 $x \leqslant 0$ 时,

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc \leqslant -abc < 0.$$

因此 (19) 没有不大于 0 的根, 所以 a, b, c 均为正数.

第 3 讲例 7

设 $x^2+y^2 \leqslant 1$ ，求证：

$$| x^2+2xy-y^2 | \leqslant \sqrt{2}. \tag{20}$$

第 3 讲例 7 解答

如果 $x^2+y^2=\rho^2<1$ ，将 x,y 同时乘以大于 1 的数 $\frac{1}{\rho}$ 后，它们的平方和等于 1 ($\rho=0$ 时 $x=y=0$, (20) 显然成立). 因此总可以假设

$$x^2+y^2=1. \tag{21}$$

(21) 启发我们采用三角函数: 令

$$x=\sin\alpha, y=\cos\alpha, 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}. \tag{22}$$

而 $x^2-y^2, 2xy$ 则使我们想到倍角的余弦与正弦，即 (20) 等价于

$$|\cos 2\alpha+\sin 2\alpha|\leqslant\sqrt{2}. \tag{23}$$

23. 显然成立. 事实上, 更一般的结果

第 3 讲例 7 解答

$$| a\cos\varphi + b\sin\varphi | = \sqrt{a^2+b^2}\left|\sin\left(\varphi + \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

是众所周知的.

例 7 虽然简单, 却有两点值得注意: (i) 将问题的条件简化为极端情况 (21); (ii) 揣摩题目的特点, 作适当的代换.

第 3 讲例 8

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 均为正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leqslant n - 1. \tag{24}$$

第 3 讲例 8 解答

令 $\frac{x_{i+1}x_{i+2}}{x_i^2} = y_i (i = 1, 2, \cdots, n, x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2)$,
则 (24) 成为 $\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} + \cdots + \frac{1}{1+y_n} \leqslant n - 1$. (25)
而由 y_i 的定义知 $y_1 y_2 \cdots y_n = 1$. (26)
(25) 的左边共 n 项, 每项均小于 1 (因为分母 $1 + y_i > 1$). 如果其中有两项 $\leqslant \frac{1}{2}$, 那么 (25) 已经成立. 设仅有 $\frac{1}{1+y_1} \leqslant \frac{1}{2}$, 即

$$y_1 \geqslant 1, y_2 \leqslant 1, y_3 \leqslant 1, \ldots, y_n \leqslant 1. \tag{27}$$

那么 $\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} \leqslant \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2 y_3 \ldots y_n}$

$$= \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{y_1}}$$

$$= 1.$$

(25) 的左边前两项之和为 1, 其余的 n-2 项均小于 1, 所以 (25) 的左边小于右边.

第 3 讲例 8 解答

注（i）在动手证 (25) 之前, 先看看左边各项的值大致是多少. 这种粗略的估计往往能将我们引上解题的正确路径, 少绕一些弯路.

(ii) 如果令 $\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}} = z_i$ ，那么 (24) 等价于

$$\sum \frac{1}{1+z_i} \geqslant 1, \tag{28}$$

与上面的解法完全对称. 在 z_i 中至多有一个小于等于 1, 否则 (28) 成立. 设 $z_1 \leqslant 1$, 则由

$$\frac{1}{1+z_2} \geqslant \frac{1}{1+z_2z_3\cdots z_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1+1}$$

即得 (28).

(iii) 我们又采用了枚举法.

有时候需要将几种方法结合起来解题.

第 3 讲例 9

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负实数，

$$x = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right), \tag{29}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}.$$

求证：

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n}\left[(x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2\right] \\ &\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2n}\left[\left(x_1^2 - y^2\right)^2 + \cdots + (x_n^2 - y^2)^2\right]}. \end{aligned} \tag{30}$$

第 3 讲例 9 解答

不妨设 (30) 的左边为 1, 否则用

$$\frac{x_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-x_i)^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-x_i)^2}}\text{及}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-x_i)^2}}\right)$$

代替 $x_i(x$ 及 y) 进行讨论. 这种化简的手段在不等式的两边均为 (同次) 齐次式时常常采用.

我们有 $1=\frac{1}{n}\sum x_i^2-\frac{2x}{n}\sum x_i+x^2=y^2-x^2$

$$=\frac{1}{n}\sum x_i^2-\frac{x}{n}\sum x_i. \tag{31}$$

第 3 讲例 9 解答

于是经过一些恒等变形与适当缩减有

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2-y^2\right)^2=\tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2-x^2-1\right)^2\\
&=\tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2-x^2\right)^2-\tfrac{2}{n}\sum\left(x_i^2-x^2\right)+1\\
&=\tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2-x^2\right)^2-2\left(y^2-x^2\right)+1\\
&=\tfrac{1}{n}\sum(x_i-x)^2\left(x_i^2+2x_ix+x^2\right)-1\\
&\geqslant\tfrac{1}{n}\sum(x_i-x)^2x_i^2+\tfrac{2x}{n}\sum(x_i-x)^2x_i-1\\
&\geqslant\left[\tfrac{1}{n}\sum(x_i-x)x_i\right]^2+\tfrac{2}{n^2}\left[\sum x_i(x_i-x)\right]^2-1\text{(柯西不等式)}\\
&=1+2-1=2,
\end{aligned}
$$

从而 (30) 成立.

例 9 显然是从概率论 “下放” 来的 (与数学期望、方差有关的) 不等式.

与柯西不等式逆向的估计也很有用, 这是波利亚于 1925 年建立的, 即下面的 (32).

第 3 讲例 10

设 $a \leqslant a_i \leqslant A, b \leqslant b_i \leqslant B (i = 1, 2, \cdots, n)$, a, b 均为正数，则

$$\begin{aligned} &\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \\ &\leqslant \left(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2 . \end{aligned} \tag{32}$$

第 3 讲例 10 解答

我们证明更一般的

$$\sum p_i a_i^2 \cdot \sum p_i b_i^2 \leqslant \left(\sum p_i a_i b_i\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2, \tag{33}$$

其中 “权” $p_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，并且 $\sum p_i = 1$.
为了证明 (33)，令 u_i, v_i 满足方程组

$$\begin{cases} a_i^2 = u_i a^2 + v_i A^2, \\ b_i^2 = u_i B^2 + v_i b^2 \end{cases} \tag{34}$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. (34) 总是有解的, 因为在 $\begin{vmatrix} a^2 & A^2 \\ B^2 & b^2 \end{vmatrix}$ 为 0 即 $a = A, b = B$ 时, 取 $u_i + v_i = 1$ 即可.

第 3 讲例 10 解答

由 (34) 及柯西不等式得

$$a_i b_i = \left(u_i a^2 + v_i A^2\right)^{1/2} \left(u_i B^2 + v_i b^2\right)^{1/2}$$

$$\geqslant u_i aB + v_i bA.$$

令 $p = \sum p_i u_i$, $q = \sum p_i v_i$ ，则

$$\frac{\sum p_i a_i^2 \cdot \sum p_i b_i^2}{(\sum p_i a_i b_i)^2} \leqslant \frac{(pa^2 + qA^2)(pB^2 + qb^2)}{(paB + qbA)^2}$$

$$= 1 + pq\left(\frac{AB - ab}{paB + qbA}\right)^2 \leqslant 1 + pq\left(\frac{AB - ab}{2\sqrt{pqabAB}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2.$$

第 3 讲例 10 解答

即 (33) 成立.

(33) 有很多推论, 如下面的例 11.

第 3 讲例 11

设 $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, 0 < a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 并且 $\sum a_i = 1$. 则有康托罗维奇 (L. V. Kantorovich, 1912—1986) 不等式

$$\sum a_i b_i \cdot \sum \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{(b_1 + b_n)^2}{4 b_1 b_n}. \tag{35}$$

第 3 讲例 11 解答

a_i 就是 (33) 中的 p_i . 两个数列 $\{\sqrt{b_i}\}, \left\{\sqrt{\frac{1}{b_i}}\right\}$ 的上界分别为 $\sqrt{b_n}(=B)$ 与 $\sqrt{\frac{1}{b_1}}(=A)$, 下界分别为 $\sqrt{b_1}(=b)$ 与 $\sqrt{\frac{1}{b_n}}(=a)$. 所以 (33) 中的 $\left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2$ 现在成为 $\frac{(b_1+b_n)^2}{4b_1b_n}$.

一个较普遍的结果往往能导出许多推论 (如从 (33) 导出 (32),(35)). 将 (35) 再 "特殊化" 可以得出

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i}\right) \leqslant \frac{(a+A)^2}{4aA} \quad \text{(Schweitzer不等式)}.$$

第 3 讲例 12

已知在 $|x| \leqslant 1$ 时，$|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$. 证明：在 $|x| \leqslant 1$ 时，

$$| 2ax + b | \leqslant 4. \tag{36}$$

第 3 讲例 12 解答

记 $f(x) = ax^2 + bx + c$，则

$$\begin{cases} f(0) = c, \\ f(1) = a + b + c, \\ f(-1) = a - b + c. \end{cases} \tag{37}$$

由 (37) 可以解出 (即用函数值表示系数)

$$a = \frac{1}{2}[f(1) + f(-1) - 2f(0)],$$

$$b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)).$$

第 3 讲例 12 解答

于是，在 $|x| \leqslant 1$ 时，由于 $|f(x)| \leqslant 1$ ，有

$$
\begin{aligned}
&| 2ax + b | \\
&= \left|[f(1) + f(-1) - 2f(0)]x + \tfrac{1}{2}[f(1) - f(-1)]\right| \\
&= \left|\left(x + \tfrac{1}{2}\right) f(1) + \left(x - \tfrac{1}{2}\right) f(-1) - 2xf(0)\right| \\
&\leqslant \left|x + \tfrac{1}{2}\right| + \left|x - \tfrac{1}{2}\right| + 2 \\
&\leqslant 4.
\end{aligned}
$$

(36) 称为马尔可夫不等式. 其实它是化学家门捷列夫 (D. I. Mendeleev, 1834—1907, 化学元素周期律的发现者) 首先发现的, 马尔可夫把它推广到 n 次多项式 $f(x)$, 得

如果 $|x| \leqslant 1$ 时，$|f(x)| \leqslant M$ ，那么 $|x| \leqslant 1$ 时，导数的绝对值

$$
| f'(x) | \leqslant Mn^2.
$$

第 3 讲例 12 解答

在区间 (a, b) 上定义的函数 $f(x)$ ，如果对这区间内任意两个数 x_1, x_2 ，均有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \tag{38}$$

那么 $f(x)$ 就称为 (a, b) 上的凸函数.
凸函数的几何意义是连接图像 $y = f(x)$ 上任意两点的弦在连接这两点的曲线的上方(图 19-1).
text_image
y y = f(x) O x_1 x_2 x
图 19-1
我们熟悉的指数函数 $y = a^x$ ，二次函数 $y = x^2$ 都是凸函数。

第 3 讲例 13

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数. 证明对任意的整数 $n \geqslant 2$ 及 (a,b) 中任意 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，均有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}. \tag{39}$$

第 3 讲例 13 解答

首先用归纳法不难证明对任意自然数 k 及 (a,b) 中任意 2^k 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2^k}$ 均有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k}. \tag{40}$$

要证明 (39) 成立, 只需证明 (39) 对 n 成立时, 对 $n-1$ 也一定成立. 于是, 假定 (39) 对 n 成立, 并设给定的 $n-1$ 个数为 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$. 取 x_n 为这 $n-1$ 个数的算术平均值, 则

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f\left(\tfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \\ &= f\left(\tfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}\right) \\ &\leqslant \tfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)}{n}. \end{aligned}$$

去分母, 整理得 $f(x_n) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$,

即 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$,

第 3 讲例 13 解答

因此 (39) 对一切 n 成立.
例 13 中所用的归纳法值得仔细体会.
由 (39) 易知, 对 (a,b) 中任意 n 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及任意正有理数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ (通常称为权)，有

$$f\Big(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\Big)\leqslant\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}. \tag{41}$$

如果 $f(x)$ 连续, 那么 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 可取任意正实数.
(41) 通常称为琴生 (Jensen,1859—1925) 不等式.
类似地, 如果在 (a,b) 上,(38) 的不等号反向, 那么 $f(x)$ 就称为凹函数, 对于凹函数,(41) 的不等号反向.
对数函数 $y=\log_a x$ ，在底 $a>1$ 时，是凹函数；在底 $a<1$ 时，是凸函数。二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，在 $a>0$ 时，是凸函数；在 $a<0$ 时，是凹函数。反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ ，在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸函数；在区间 $(-\infty,0)$ 上是凹函数。一般地，如果在区间 I 上，二阶导数 $f''(x)>0(<0)$ ，那么 $f(x)$ 在 I 上是凸（凹）函数。

第 3 讲例 13 解答

凸函数与琴生不等式是证明不等式的有力工具, 但证明的套路比较固定, 所以竞赛中并不常见. 因此本书不多涉及.

第 4 讲例 1

设

$$a_n = 4 - \underbrace{\cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{\ddots_{4-\frac{1}{4}}}}}}_{n \text{ terms}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

：(a) $a_n > 3$. (b) a_n 严格递减，即 $a_{n+1} < a_n (n = 1, 2, \cdots)$.

第 4 讲例 1 解答

显然 $a_1 = 4 > 3, a_2 = 4 - \frac{1}{4} > 3$ ，并且 $a_2 < a_1$.
假设 $a_n > 3, a_n > a_{n+1}$ ，那么 $a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} > 4 - \frac{1}{3} > 3$ ，

$$a_{n+2} = 4 - \frac{1}{a_{n+1}} < 4 - \frac{1}{a_n} = a_{n+1}.$$

因此，对一切自然数 n ，(a)，(b) 均成立.
注 a_n 的极限为 $2 + \sqrt{3}$.

第 4 讲例 2

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$ ，求证：

$$\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

第 4 讲例 2 解答

由 A-G 不等式, 得 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}>2\sqrt{\frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{a_n}}=\sqrt{2}$.

又设 (1) 式右边不等式成立, 则

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}<\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{n}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2n}\leqslant\sqrt{2}+\frac{1}{n+1}.$$

所以 (1) 式对一切自然数 n 成立.

第 4 讲例 3

(a) 设正数 a_1, a_2, a_3 满足

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4), \tag{2}$$

求证: a_1, a_2, a_3 一定是某个三角形的三条边长.

2. 设正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)^2 > (n-1)\left(a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4\right), \tag{3}$$

其中 $n \geqslant 3$. 求证: 这 n 个数中的任意三个均可作为某个三角形的边长.

第 4 讲例 3 解答

(a) 由于 (参见第 1 讲例 4 的海伦-秦九韶公式)

$$\begin{aligned} &0 < \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)^2 - 2\left(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4\right) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 + a_2 - a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2), \end{aligned}$$

所以 a_1, a_2, a_3 中最大的小于其他两个的和，这三个数可以作为一个三角形的边长.

2. 假设由 (3) 可以推出 (2). 考虑满足

第 4 讲例 3 解答

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2\right)^2>n\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{n+1}^4\right) \tag{4}$$

的正数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ ，我们要证明 (3) 成立.
记 $A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2, B=a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4$, (4) 就是

$$\left(A+a_{n+1}^2\right)^2>n\left(B+a_{n+1}^4\right). \tag{5}$$

又 $nB+na_{n+1}^4=(n-1)B+a_{n+1}^4+B+(n-1)a_{n+1}^4$

$$\begin{aligned}&\geqslant(n-1)B+a_{n+1}^4+2\sqrt{(n-1)B}a_{n+1}^2\\&=\left[\sqrt{(n-1)B}+a_{n+1}^2\right]^2.\end{aligned} \tag{6}$$

由 (5)，(6) 得 $A+a_{n+1}^2\geqslant\sqrt{(n-1)B}+a_{n+1}^2$
因此 (3) 成立. 由归纳假设,(2) 也成立.

第 4 讲例 4

设 $a>0$，则

$$\sqrt{a+\sqrt{2a+\sqrt{3a+\cdots+\sqrt{na}}}}<\sqrt{a}+1. \tag{7}$$

第 4 讲例 4 解答

我们用归纳法证明当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，

$$\sqrt{ka+\sqrt{(k+1)a+\cdots+\sqrt{na}}}<1+\sqrt{ka}. \tag{8}$$

当 $k=n$ 时，(8) 显然成立. 假设

$$\sqrt{(k+1)a+\sqrt{(k+2)a+\cdots+\sqrt{na}}}<1+\sqrt{(k+1)a},$$

则 $\sqrt{ka+\sqrt{(k+1)a+\cdots+\sqrt{na}}}<\sqrt{ka+1+\sqrt{(k+1)a}}$

$$<\sqrt{ka+1+2\sqrt{ka}}=1+\sqrt{ka}.$$

因此, 对一切满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的自然数 k,(8) 式成立. 特别地, 在 $k=1$ 时得到 (7).

注这是归纳法的一种变形, 从某个 n 起倒推至 1.

第 4 讲例 5

已知 $a_0 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = a_k + \frac{1}{n}a_k^2 (1 \leqslant k \leqslant n)$ ，证明

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1. \tag{9}$$

第 4 讲例 5 解答

与数列有关的不等式, 常用数学归纳法证明, 上面已经举了几个例子. 现在的 (9) 则相当难证. 困难在于对 k 进行归纳时 (n 是定值), 没有现成的关于 a_k 的不等式可以作为归纳假设 (用 $1-\frac{1}{k}<a_k<1$ 是无法得出 $1-\frac{1}{k+1}<a_{k+1}<1$ 的), 需要我们自己去摸索.

先考虑上界, 由于 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}=\frac{2n+1}{4n}$,

$$a_2=\frac{a_1}{n}(n+a_1),$$

我们希望 a_1 的上界以 n 为因数 (从而 $\frac{a_1}{n}$) 的 "分母" n 可以约去). 直接将 $a_1=\frac{2n+1}{4n}$ 代入实在太复杂了, 以后的迭代无法进行. 与 $\frac{2n+1}{4n}$ 相近的、分子为 n 的上界以 $\frac{n}{2n-1}$ 为好, 简单、自然. 这时 $a_2<\frac{1}{2n-1}\left(n+\frac{n}{2n-1}\right)=\frac{2n^2}{(2n-1)^2}<\frac{n}{2n-2}$. 最后一步仍是为了简单: 分子、分母均为 n 的一次式, 分子与 a_1 的上界 $\frac{n}{2n-1}$ 的分子保持一致.

第 4 讲例 5 解答

由 $a_1 < \frac{n}{2n-1}, a_2 < \frac{n}{2n-2}$，我们猜测

$$a_k < \frac{n}{2n-k}. \tag{10}$$

将 (10) 作为归纳假设, 则 $a_{k+1} = \frac{a_k}{n}(n + a_k) < \frac{1}{2n-k}\left(n + \frac{n}{2n-k}\right)$

$$= \frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2} < \frac{n}{2n-k-1}.$$

于是 (10) 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 均成立. 特别地, 在 $k = n$ 时, $a_n < \frac{n}{2n-n} = 1$.
再考虑下界. 一个理想的候选者是 $\frac{n-1}{2n-k}$，它在 $n = k$ 时恰好为 $1 - \frac{1}{n}$. 然而

第 4 讲例 5 解答

经过尝试, 不能顺利通过归纳这一关. 如果从失败中总结经验, 就会想到 n-1 必须换为比 n 大的 $n+1$, 从而分母 2n-k 应相应地换为 $2n-k+2$ (不能用 $2n-k+1$, 因为 $\frac{n+1}{2n-k+1}$ 大于上界 $\frac{n}{2n-k}$). 即猜测

$$a_k > \frac{n+1}{2n-k+2}. \tag{11}$$

假设 (11) 成立, 则

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + \tfrac{1}{n}a_k^2 > \tfrac{n+1}{2n-k+2} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{n+1}{2n-k+2}\right)^2 \\
&= \tfrac{n+1}{2n-k+1} - \tfrac{n+1}{(2n-k+1)(2n-k+2)} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{n+1}{2n-k+2}\right)^2 \\
&= \tfrac{n+1}{2n-k+1} + \tfrac{n+1}{(2n-k+2)^2}\cdot\left(\tfrac{n+1}{n} - \tfrac{2n-k+2}{2n-k+1}\right) \\
&> \tfrac{n+1}{2n-k+1}.
\end{aligned}$$

第 4 讲例 5 解答

于是 (11) 对一切 $1 \leqslant k \leqslant n$ 均成立. 特别地, 在 k = n 时,

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n}.$$

第 4 讲例 6

设 x 为正数, $[x]$ 表示 x 的整数部分. 证明:

$$[x]+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}\leqslant[nx]. \tag{12}$$

第 4 讲例 6 解答

这是一道美国数学奥林匹克的试题, 原来的解答极为复杂, 上海的赵斌先生给出了一个非常漂亮的证明. 他采用了数学归纳法, 令

$$a_k = [x] + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[kx]}{k}. \tag{13}$$

假设结论在 n<k 时成立, 即 $a_1 \leqslant [x]$,

$$a_2 \leqslant [2x],$$

••••••

$$a_{k-1} \leqslant [(k-1)x].$$

相加得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \leqslant [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x]$. (14)
由定义 (13)，得 $k(a_k - a_{k-1}) = [kx]$,

$$(k-1)\,(a_{k-1} - a_{k-2}) = [(k-1)x],$$

第 4 讲例 6 解答

• • • • • •

$$1 \cdot a_1 = [x].$$

相加得 $ka_k - a_{k-1} - \cdots - a_1 = [kx] + [(k-1)x] + \cdots + [x]$. (15)
由 (14)，(15) 得

$$ka_k \leqslant [kx] + [(k-1)x] + \cdots + [x] + [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x],$$

因为 $[ix] + [(k-i)x] = [[ix] + (k-i)x] \leqslant [ix + (k-i)x] = [kx]$ ，所以

$$ka_k \leqslant [kx] + [kx] + \cdots + [kx] = k[kx],$$

即 $a_k \leqslant [kx]$.
从而 (12) 成立.

第 4 讲例 7

已知数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 = 2, r_n = r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + 1 (n = 2, 3, \cdots)$ ，自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1, \tag{16}$$

求证：$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}$. (17)

第 4 讲例 7 解答

由 $\{r_n\}$ 的定义, 容易看出 (或用归纳法证明)

$$1-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\cdots-\frac{1}{r_n}=\frac{1}{r_1r_2\cdots r_n}. \tag{18}$$

当 $\frac{1}{a_1}<1$ 时, 自然数 $a_1\geqslant 2=r_1$, 所以 $\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{r_1}$. 假设在 $n<k$ 时,(17) 对一切满足 (16) 的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 成立. 如果在 n=k 时, 有一组满足 (16) 的自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 使得

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}, \tag{19}$$

那么 (不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$) 由归纳假设

$$\frac{1}{a_1}\leqslant\frac{1}{r_1},$$

第 4 讲例 7 解答

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2},$$

• • • • • •

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_{n-1}}.$$

将以上各式分别乘以非正数 $a_1-a_2, a_2-a_3, \cdots, a_{n-1}-a_n$；将 (19) 乘以 a_n，然后相加得 $n>\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}$. 于是, 由 A-G 不等式得

$$1>\frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{r_1}+\frac{a_2}{r_2}+\cdots+\frac{a_n}{r_n}\right)\geqslant\sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{r_1r_2\cdots r_n}},$$

即 $r_1r_2\cdots r_n\geqslant a_1a_2\cdots a_n$. (20)

另一方面，正数 $1-\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{a_1a_2\ldots a_n}$.

所以由 (18)，(19) 得 $\frac{1}{r_1r_2\cdots r_n}\geqslant\frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$，

即 $r_1r_2\ldots r_n\leqslant a_1a_2\ldots a_n$,

第 4 讲例 7 解答

与 (20) 矛盾.

因此，(19) 不成立. 从而对一切自然数 n 及满足 (16) 的自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，(17) 成立.

注可进一步推出 (17) 的等号当且仅当 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 时成立.

例 7 原是厄迪斯的一个猜想. 上面的解法是宁波大学陈计先生给出的, 在归纳法中使用反证法 (相当于增添条件 (19)), 极具巧思, 值得仔细玩味.

第 4 讲例 8

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为两两不等的自然数，并且所有的差 $|a_i - a_j|\,(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 互不相等. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{1}{6} n(n^2 + 5). \tag{21}$$

第 4 讲例 8 解答

显然 $a_1 \geqslant 1$. 假设 (21) 对 n 成立. 考虑 $n+1$ 个符合题设条件的自然数

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}.$$

每一对 a_i, a_j 有一个差，共 C_{n+1}^2 个差. 这些差 $|a_i - a_j| \leqslant a_{n+1} - a_1$. 因此，

$$a_{n+1} \geqslant a_1 + \mathrm{C}_{n+1}^2 \tag{22}$$

(否则由抽屉原理, 有两个差相等).
由 (21)，(22) 得 $\sum_{i=1}^{n+1} a_{i+1} \geqslant 1 + C_{n+1}^2 + \frac{1}{6}n(n^2+5)$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[(n+1)^2+5].$$

从而 (21) 对一切自然数 n 成立.
注若题中 a_i 均限制为奇数，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{1}{3}n(n^2+2)$.

第 4 讲例 9

求 c 的最小值, 使得

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n} \tag{23}$$

对一切满足 $x_1+x_2+\cdots+x_i\leqslant x_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$ 的正数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均成立.

第 4 讲例 9 解答

重要的是定出 c 的值.

取 $x_k = 2^k, k = 1, 2, \cdots, n$ ，则

$$\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} - 1}}.$$

当 $n \to +\infty$ 时，上式 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$. 因此 $c \geqslant \sqrt{2} + 1$.

在 $c = \sqrt{2} + 1$ 时，显然 $\sqrt{x_1} < c\sqrt{x_1}$. 设对于 n ，(23) 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n+1}} \\
&\leqslant c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} + \sqrt{x_{n+1}} \\
&= c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}} + c(\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} - \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}) \\
&+ \sqrt{x_{n+1}} \\
&= c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}} + \sqrt{x_{n+1}} - c \cdot \frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1 + \cdots + x_{n+1}} + \sqrt{x_1 + \cdots + x_n}} \\
&\leqslant c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}} + \sqrt{x_{n+1}} - c \cdot \frac{x_{n+1}}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_{n+1}}} \\
&\leqslant c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1}}.
\end{aligned}$$

第 4 讲例 9 解答

因此, $\sqrt{2}+1$ 就是所求的最小值.

第 4 讲例 10

证明: 对一切自然数 n,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2. \tag{24}$$

第 4 讲例 10 解答

直接用归纳法不能奏效. 但更强的结论

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n} \tag{25}$$

却不难用归纳法推出 (请读者自己补出证明), 从而 (24) 也随之成立.
先将结论加强, 再用归纳法, 反而好证. 这是因为结论加强了, 归纳假设 (我们可以利用的条件) 也加强了.

第 4 讲例 11

$b_1 = 100, b_{n+1} = 100^{b_n} (n = 1, 2, \cdots)$. $a_1 = 3, a_{n+1} = 3^{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$. 求满足 $b_m > a_{100}$ 的最小正整数 m.

第 4 讲例 11 解答

显然 $100 > 3^3$ ，所以 $b_n > a_{n+1}$ 。另一方面，我们可以证明

$$a_{n+2} > b_n. \tag{26}$$

从而所求的 $m = 99$.
但 (26) 不能直接用归纳法证明, 需要先加强为

$$a_{n+2} > 5b_n. \tag{27}$$

在 (27) 成立时，

$$\begin{aligned} a_{n+3} &= 3^{a_{n+2}} > 3^{5b_n} = 243^{b_n} > 2^{b_n} \cdot 100^{b_n} \\ &= 2^{b_n} \cdot b_{n+1} > 5b_{n+1}. \end{aligned}$$

所以 (27) 对一切 n 成立.

第 4 讲例 12

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$. $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是这三角形中任意给定的点. 证明可以将这 n 个点重新编号, 使得

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 \leqslant AB^2. \tag{28}$$

第 4 讲例 12 解答

将 (28) 加强为

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 + P_nB^2 \leqslant AB^2. \tag{29}$$

$n = 0$ 时，(29) 显然成立. 设在 $n < k$ 时，(29) 成立. 考虑 k 个点作斜边上的高 CD . 如果 k 个点不全在 $\triangle ACD$ 中, 也不全在 $\triangle BCD$ 中, 那么由归纳假设可以将它们编上号, 使得

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{h-1}P_h^2 + P_hC^2 \leqslant AC^2, \tag{30}$$

$$CP_{h+1}^2 + P_{h+1}P_{h+2}^2 + \cdots + P_{k-1}P_k^2 + P_kB^2 \leqslant BC^2. \tag{31}$$

这里 $P_1, P_2, \cdots, P_h$ 在 $\triangle ACD$ 中，$P_{h+1}, P_{h+2}, \cdots, P_k$ 在 $\triangle BCD$ 中.
由于 $\angle P_hCP_{h+1} < \angle ACB = 90^\circ$ ，所以

$$P_hC^2 + CP_{h+1}^2 > P_hP_{h+1}^2. \tag{32}$$

第 4 讲例 12 解答

将 (30)，(31) 相加并利用 (32) 得

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{h-1}P_h^2 + P_hP_{h+1}^2 + P_{h+1}P_{h+2}^2 + \cdots + P_{k-1}P_k^2 + P_kB^2 \leqslant AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

即 (29) 对 n=k 仍然成立.

如果 k 个点全在 $\triangle ACD$ 或 $\triangle BCD$ 中, 作斜边上的高将这个三角形分为两个直角三角形, 如此继续下去, 终会化为前面所说的情况, 细节请读者自己补出.

最后, 我们介绍一个不等式, 虽然不全用归纳法来证明, 但反复进行迭代, 亦颇有趣.

第 4 讲例 13

设 $x_1, x_2, \cdots$ 为正实数，并且

$$x_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_n^j, n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{33}$$

对所有 n

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} < x_n < 2 - \frac{1}{2^n}. \tag{34}$$

第 4 讲例 13 解答

$n=1$ 时, $x_n=1$, 结论显然. 以下设 $n>1$, 并将 x_n 改写为 x.
显然 $x\neq 1$. (33) 即 $x^n=\frac{x^n-1}{x-1}$, 从而

$$x^{n+1}-2x^n+1=0. \tag{35}$$

由 (35) 得 $x^n(2-x)=1$ ，可见 $x<2$，从而

$$1=x^n(2-x)<2^n(2-x),$$

$$x<2-\frac{1}{2^n}.$$

这样, 由一个平凡的上界 2, 经过一次迭代产生更好的上界 $2-\frac{1}{2^n}$.
下界可用同样的手法. 首先 $x<1$ 时, $x^n(2-x)<x(2-x)<1$. 所以 $x>1$. 但用 $x=1$ 这个下界迭代并不能产生新的下界.

第 4 讲例 13 解答

我们指出 $2-\frac{2}{n+1}$ 是下界. 若 $x<2-\frac{2}{n+1}$, 则 $\frac{x}{n}<2-x$, 从而 $\frac{x}{n}(2-x)>\frac{1}{n}\left(2-x+\frac{x-1}{n}\right)$ (两个正数的和为定值, 小的越小, 两数的积越小), 即 $x(2-x)>2-x+\frac{x-1}{n}$. 反复用这一手法, 得

$$x^n(2-x)>x^{n-1}\left(2-x+\frac{x-1}{n}\right)>\cdots>2-x+\frac{x-1}{n}\cdot n=1.$$

与 (35) 矛盾. 所以 $x\geqslant 2-\frac{2}{n+1}$. 从而 $1=x^n(2-x)\geqslant\left(2-\frac{2}{n+1}\right)^n(2-x)$, 即

$$\frac{1}{2^n}\geqslant\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n(2-x). \tag{36}$$

用归纳法易知 x > -1 时,

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx, \tag{37}$$

这称为贝努里 (Bernoulli) 不等式 (更一般的形式见下节例 2).

第 4 讲例 13 解答

用贝努里不等式 (或上面所用的方法), 由 (36) 得 $n \geqslant 4$ 时,

$$\frac{1}{2^n} \geqslant \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)(2-x) > \frac{1}{4}(2-x),$$

从而 $x \geqslant 2 - \frac{1}{2^{n-2}}$.
$2 - \frac{1}{2^{n-2}}$ 还不是所希望的下界. 再迭代一次

$$1 = x^n(2-x) \geqslant \left(2 - \frac{1}{2^{n-2}}\right)^n (2-x),$$

即 $\frac{1}{2^n} \geqslant \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)^n (2-x)$,
再用贝努里不等式 $\frac{1}{2^n} \geqslant \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}}\right)(2-x)$

$$\begin{aligned} &\geqslant \left[1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{n}{1+(n-2)+1}\right](2-x) \\ &= \tfrac{1}{2}(2-x). \end{aligned}$$

第 4 讲例 13 解答

从而 $x \geqslant 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$.
这正是所希望的下界.
剩下 $n = 2, 3$ 的情况.
$n = 3$ 时，$x^4 - 2x^3 + 1 = (x-1)(x^3 - x^2 - x - 1)$ 若 $x \leqslant \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{2^2}$ ，则

$$\begin{aligned} & x^3 - x^2 - x - 1 \leqslant \left(\tfrac{7}{4} - 1\right) x^2 - x - 1 \leqslant \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{7}{4} - 1\right) x - 1 \\ & \leqslant \tfrac{9}{16} \times \tfrac{7}{4} - 1 < 0. \end{aligned}$$

因此必有 $x > 2 - \frac{1}{2^2}$
$n = 2$ 时，$x^3 - 2x^2 + 1 = (x-1)(x^2 - x - 1) = 0, x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} > 2 - \frac{1}{2}$.

第 5 讲例 1

求 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}(x\in(0,\pi))$ 的最小值.

第 5 讲例 1 解答

函数 $f(t)=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}(t\in(0,1])$ 的导数

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}=\frac{t^2-4}{2t^2}<0,$$

所以 $f(t)$ 严格递减. $f(t)$ 的最小值为 $f(1)=\frac{5}{2}$.
从而 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$ ，在 $x=\frac{\pi}{2}$ 时取得.
本题改用 $t(=\sin x)$ 为自变量, 函数及导函数的表达式均比较简单.
注意不可由 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{\frac{\sin x}{2}\cdot\frac{2}{\sin x}}=2$ ，贸然认定最小值为 2. 如不用导数，可由 $\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}\right)^2=4+\left(\frac{2}{\sin x}-\frac{\sin x}{2}\right)^2\geqslant 4+\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ 得出结果.

第 5 讲例 2

证明: 在 $x > -1$ 时, 对于 $0 < \alpha < 1$, 有

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant 1 + \alpha x, \tag{1}$$

而在 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$ 时，(1) 中不等号反向（贝努里不等式）.

第 5 讲例 2 解答

令 $f(x) = (1+x)^\alpha - 1 - \alpha x$，则

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha, \tag{2}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \tag{3}$$

对于 $0 < \alpha < 1, f''(x) < 0$，所以 $f'(x)$ 递减。因为 $f'(0) = 0$，所以在 $x > 0$ 时，$f'(x) < 0, f(x)$ 递减。$f(x) \leqslant f(0) = 0$。在 $x < 0$ 时，$f'(x) > 0, f(x)$ 递增，$f(x) \leqslant f(0) = 0$。即 (1) 成立（$f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值）。
同样, 可得 $\alpha < 0$ 与 $\alpha > 1$ 时,(1) 中不等号反向.

$$\alpha = 0 \text{与} \alpha = 1 \text{时}, f(x) = 0.$$

利用导数可以处理一般的实数指数的问题. 不用导数, 往往只能处理整数指数或有理数指数的情况. 例如贝努里不等式, 用归纳法只能处理 α 为正整数 n 的情况 (参见第 4 讲 (37) 式).
多个变量的函数, 有时可对各个变量逐一处理.

第 5 讲例 3

已知 $x, y, z \in R^+$. 求证:

$$\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)} \leqslant \frac{1}{5120}. \tag{4}$$

第 5 讲例 3 解答

对函数 $f(t)=\frac{t}{(at+b)(ct+d)}, t\in\mathbf{R}^+, a,b,c,d>0$ 求导，得

$$f'(t)=\frac{(at+b)(ct+d)-t(2act+bc+ad)}{(at+b)^2(ct+d)^2}=\frac{bd-act^2}{(at+b)^2(ct+d)^2}.$$

当 $t=\sqrt{\frac{bd}{ac}}$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2}$.
固定 y，对 x 的函数 $g(x)=\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}$ 用上面的结果 $(a=5,b=1,c=4,d=3y)$，得

$$\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}\leqslant\frac{1}{(\sqrt{15y}+2)^2}. \tag{5}$$

同样, 对 z 的函数有

$$\frac{z}{(5y+6z)(z+18)}\leqslant\frac{1}{(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}. \tag{6}$$

第 5 讲例 3 解答

由 (5)，(6) 并对 $\sqrt{y}$ 的函数再一次用上面的结果得

(4) 式左边 $\leqslant \frac{y}{(\sqrt{15y}+2)^2(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sqrt{y}}{(\sqrt{15y}+2)(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})}\right]^2 \\
&\leqslant \left[\frac{1}{(\sqrt{18\sqrt{5}}+\sqrt{2\sqrt{5}})^2}\right]^2 \\
&= \frac{1}{5120}.
\end{aligned}
$$

第 5 讲例 4

已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_1 = \frac{21}{16}, \tag{7}$$

$$2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}, n \geqslant 2. \tag{8}$$

设 m 为正整数, $m \geqslant 2$. 证明: 当 $n \leqslant m$ 时,

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left[m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right] < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}. \tag{9}$$

(2005 年中国数学奥林匹克试题, 朱华伟提供)

第 5 讲例 4 解答

本题当然是先求出 $\{a_n\}$ 的通项. 由 (8) 得

$$2\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)=3\left(a_{n-1}+\frac{3}{2^{n+2}}\right),$$

从而 $a_n+\frac{3}{2^{n+3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(a_1+\frac{3}{16}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

于是 (9) 化为 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m-n+1}$. (10)

在 $n\geqslant 2$ 时，(10) 可加强为

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\cdot m\leqslant\frac{m^2-1}{m-n+1}. \tag{11}$$

(11) 的证明如下：

设 $f(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}(m-n+1)$. 在 $n<m$ 时, $\frac{f(n)}{f(n+1)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{m-n+1}{m-n}$.

第 5 讲例 4 解答

因为 $\left(1+\frac{1}{m-n}\right)^m > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 1+m\cdot\frac{1}{m} = 2 > \frac{3}{2}$,
所以 $f(n) > f(n+1)$
由于 $f(n)$ 递减，要证 (11)，只需证 $f(2) < \frac{m^2-1}{m}$ ，即

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{m}} \leqslant \frac{m+1}{m}. \tag{12}$$

因为 $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m \geqslant 1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2 = \frac{5}{2}-\frac{1}{2m} \geqslant \frac{9}{4}$ ，所以 (12) 成立，(11) 也随之成立.
当 $m=n\geqslant 2$ 时，易证 (11) 成立.
容易看出, 当且仅当 $m=n=2$ 时,(11) 中等号成立.
于是, 剩下的问题是证明 $n=1$ 时, 式 (10) 成立, 即

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right] < \frac{m^2-1}{m}. \tag{13}$$

第 5 讲例 4 解答

为了证明 (13)，考虑关于 t 的二次函数 $y = mt - \frac{2}{3}t^2$
这个函数在 $t \leqslant \frac{3}{4}m$ 时递增，而

$$\left(1 + \frac{1}{2m}\right)^m > 1 + m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{3}{2},$$

得 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}} < 1 + \frac{1}{2m}$,

$$1 + \frac{1}{2m} < 1 + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}m,$$

所以 $m\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{m}}$

$$< m\left(1 + \frac{1}{2m}\right) - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2m}\right)^2$$

第 5 讲例 4 解答

$$< m + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{2}{3m}$$

$$= m - \frac{1}{m} + \frac{1}{3m} - \frac{1}{6} \leqslant \frac{m^2 - 1}{m}.$$

因此 (13) 成立.

在上面的证明中，n 为正整数，这与原来的题意相符。其实，不等式 (10) 对一切满足 $1 \leqslant n \leqslant m$ 的实数 n 均成立（m 为大于或等于 2 的实数)。上面的解答需要略加修改。

关于 $f(n)$ 的单调性, 应当利用导数

$$\begin{aligned} f'(n) &= -\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} + (m - n + 1)\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \tfrac{1}{m} \ln \tfrac{3}{2} \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\tfrac{m-n+1}{m} \ln \tfrac{3}{2} - 1\right) \\ &< \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \left(\ln \tfrac{3}{2} - 1\right) < 0. \end{aligned}$$

第 5 讲例 4 解答

而在 $1 \leqslant n \leqslant 2$ 时，应当先证明

$$g(n) = (m+1-n)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]$$

是单调递减的 (从而, 问题化为 (11) 的证明). 这也要利用导致: 因为

$$\begin{aligned} g'(n) = &-\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot m - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\right] \\ &+(m-n+1)\cdot\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}} \cdot \tfrac{m-2}{m}\right]\ln\tfrac{3}{2}, \end{aligned}$$

于是 $g'(n) < 0$

$$\Leftarrow m\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(1-\ln\frac{3}{2}\right) > (m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\ln\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}$$

第 5 讲例 4 解答

$$\Leftarrow m\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)>(m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\ln\frac{3}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}$$

$$\Leftarrow m\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)>(m-2)\ln\frac{3}{2}+1$$

$$\Leftarrow m\left(1-2\ln\frac{3}{2}\right)>1-2\ln\frac{3}{2},$$

而 $1-2\ln\frac{3}{2}>0\left(e=2.718\cdots>\left(\frac{3}{2}\right)^2=2.25\right)$，所以上面最后的不等式成立。从而 $g(n)$ 递减。

题时, 可以考虑问题的推广与加强, 做得比要求更多一些.

第 5 讲例 4 解答

两个变量之间如果有条件相关联, 那么实际是一个变量. 但在对一个变量求导时, 不要忘记另一个变量是它的函数, 也必须求导. 复合函数的求导法则是 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. 特别常用的是 $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$,

$$\left(f\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = f'\left(\frac{a}{x}\right)\left(-\frac{a}{x^2}\right).$$

第 5 讲例 5

已知 a, b 为正数, 并且

$$a + b = 2, \tag{14}$$

求证: 在 $n > 1$ 时,

$$a^n + b^n \geqslant 2. \tag{15}$$

第 5 讲例 5 解答

在 $a=b=1$ 时, 显然 $a^n+b^n=2$.
不妨设 $a \geqslant 1 \geqslant b$. $a^n+b^n=a^n+(2-a)^n=f(a)$ 是 a 的函数.

$$f'(a)=na^{n-1}-nb^{n-1}=n\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right) \geqslant 0,$$

所以 $f(a)$ 递增, $f(a) \geqslant f(1)=2$. 即 (15) 式成立.
本题的 n，如果是自然数，可以不用导数来证明。但如果 n 是一般的实数，那么导数的利用就是非常必要了。
对于三个或更多个变量的条件不等式, 可以固定其中一些变数, 化为一元函数. 再经过调整得出所需要的结果.

第 5 讲例 6

已知 a, b, c 为非负实数，且 $a+b+c=1$. 求证：

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2 \geqslant 2.$$

第 5 讲例 6 解答

注意到, 在 $a=1, b=c=0$ 时, 所证不等式成立. 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$. 固定 b , 则 $c=1-b-a$ 是 a 的函数.
考虑 a 的函数 $f(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$ ，有
$f(a)$ 递减 $\Leftrightarrow f'(a) \leqslant 0$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -a(1-a^2)+c(1-c^2) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow (a-c)\left(a^2+ac+c^2-1\right) \leqslant 0 \\
&\Leftrightarrow a^2+ac+c^2-1 \leqslant 0 \\
&\Leftarrow (a+c)^2 \leqslant 1.
\end{aligned}
$$

最后的不等式显然成立. 所以, $f(a)$ 递减. 可以使 a 增大 c 减小 $(a+c$ 保持不变), 而 $f(a)$ 一直减小, 直至 c 减小至 0. 于是, $(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$ 减少为 $(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1$ (其中 $a+b=1$).
对函数 $\varphi(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1(a+b=1)$ 采用同样的做法 (前面的 c 换成 b，可知 $\varphi(a)$ 递减. 所以，$\varphi(a) \geqslant (1-1^2)^2+(1-0^2)^2+1=2$.

第 5 讲例 6 解答

因此，所证不等式成立.

由例 6 可以看出, 利用导数调整的步骤是:

(i) 选定目标，也就是不等式中等号成立（函数取最大值或最小值）的情况；

(ii) 固定一些变量，使函数成为一元函数；

(iii) 确定调整方向，也就是应证明该一元函数递增或递减；

(iv) 利用导数证明函数递增或递减，从而使一个变量调整到所需要的值；

(V) 继续采取上面的做法，直至使各个变量都调整到所需要的值.

第 5 讲例 7

已知 $x, y, z \in R^{+}$，且 $xyz = 1$。求证：

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}. \tag{16}$$

第 5 讲例 7 解答

不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$.
当 y<2 时, 固定 x, 则 $z = \frac{1}{xy}$.
函数 $f(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}}$ 递减

$$\Leftrightarrow f'(y) \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{xy^2} \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{(1+y)^3} \geqslant \frac{z^2}{(1+z)^3}$$

$\Leftarrow \frac{y^2}{(1+y)^3}$ 递增 $\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{(1+y)^3}\right)' \geqslant 0$

$$\Leftrightarrow 2y(1+y) - 3y^2 = y(2-y) \geqslant 0.$$

第 5 讲例 7 解答

最后一个不等式显然成立. 因此, $f(y)$ 递减. 此时, 可增大 z 减小 y, 直至 y = z.
当 $y \geqslant 2$ 时, 固定 z, 则 $x = \frac{1}{yz}$.
函数 $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{\sqrt{1+y}} + \frac{1}{\sqrt{1+z}}$ 递减

$$\Leftrightarrow \varphi'(y) \leqslant 0$$

$\Leftrightarrow \cdots$ (前面的 z 换成 x)

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{(1+y)^3} \geqslant \frac{x^2}{(1+x)^3}$$

$\Leftarrow \frac{y^2}{(1+y)^3}$ 递减

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{(1+y)^3}\right)' \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow y(2-y) \leqslant 0.$$

第 5 讲例 7 解答

最后一个不等式显然成立. 因此, $\varphi(y)$ 递减. 此时, 可减小 y 增大 x, 直至 $y=2$. 再用前面的方法调整使 $y=z$. 于是, 式 (16) 化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{2}{\sqrt{1+y}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}(xy^2=1, y \leqslant x).$$

函数 $h(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{2}{\sqrt{1+y}}$ 递增

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow h'(y) \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{y^3}-\frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow y^{-2}(1+y) \geqslant 1+x \\
&\Leftrightarrow x(1+y) \geqslant 1+x \\
&\Leftrightarrow xy \geqslant 1.
\end{aligned}$$

因为 $y \leqslant x, xy^2=1$ ，所以 $y \leqslant 1, xy \geqslant 1$ 。$h(y)$ 递增。可使 y 增大 x 减小，直至 x = y = 1。在这个过程中，$h(y)$ 一直增加，直至取得最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

第 5 讲例 8

已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^{+} \cup \{0\}$，且 $x+y+z=1$．求证:

$$\sum \left(\frac{20}{15-9x^2} - 9x^2 \right) \leqslant \frac{9}{7}.$$

第 5 讲例 8 解答

当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.
$\sum(-9x^2)$ 在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，取得最大值，但 $\sum\frac{20}{15-9x^2}$ 却不是在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，取得最大值. 这一点先说明如下：
不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$. 固定 y , 则 $z=1-y-x$.
函数 $f(x)=\sum\frac{20}{15-9x^2}$ 递增

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow f'(x)\geqslant 0\\&\Leftrightarrow \frac{x}{(15-9x^2)^2}-\frac{z}{(15-9z^2)^2}\geqslant 0.\end{aligned}$$

由于 $x\geqslant z, 15-9x^2\leqslant 15-9z^2$ ，所以，最后一个不等式成立。从而，$f(x)$ 递增。因此, 可使 x 增大 z 减小, 直至 z 变为 0. 在这个过程中, $\sum\frac{20}{15-9x^2}$ 一直增加. 同样, 可使 x 增大 y 减小, 直至 y 也变为 0, x 变为 1. 所以,

$$\sum\frac{20}{15-9x^2}\leqslant\frac{20}{15-9}+\frac{20}{15}+\frac{20}{15}=6.$$

第 5 讲例 8 解答

最大值 6 在 $x=1, y=z=0$ 时取得.
因为 $\sum \frac{20}{15-9x^2} \leqslant 6$ ，所以，在 $9\sum x^2 \geqslant \frac{33}{7} = 6 - \frac{9}{7}$ 时，所证不等式成立.
设 $9\sum x^2 < \frac{33}{7} (< 5)$.
不妨设 $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant z$. 固定 y , 则 $z = 1 - y - x$.
函数 $F(x) = \sum \left(\frac{20}{15-9x^2} - 9x^2 \right)$ 递减

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow F'(x) < 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{20x}{(15-9x^2)^2} - x - \frac{20z}{(15-9z^2)^2} + z < 0 \\
&\Leftarrow \left(\frac{20x}{(15-9x^2)^2} - x \right)' < 0 \\
&\Leftrightarrow 20(15+27x^2) - (15-9x^2)^3 < 0.
\end{aligned}
$$

因为 $15 - 9x^2 > 15 - 5 = 10$ ，所以，

$$
\begin{aligned}
&(15-9x^2)^3 - 20(15+27x^2) > 100(15-9x^2) - 20(15+27x^2) \\
&= 20(60 - 72x^2) > 20(60 - 8 \times 5) > 0.
\end{aligned}
$$

第 5 讲例 8 解答

于是，$F(x)$ 递减. 可调小 x 增大 z，直至 x 或 z 成为 $\frac{1}{3}$. 在此过程中，$F(x)$ 一直增加.

不妨设 $z=\frac{1}{3}$ ，又设 $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant y$. 继续采用上面的做法，便知所证不等式成立，其中等号仅在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时成立.

本例不适合用琴生不等式证明. 因为函数 $g(x)=\frac{20}{15-9x^2}-9x^2$ 并非凸函数, 它的二阶导数与上面的 $20(15+27x^2)-(15-9x^2)^3$ 只差一个正因子. 而 $20(15+27x^2)-(15-9x^2)^3$ 并不恒负, 例如, $x=1$ 或接近 1 时, 即取正值.

第 5 讲例 9

给定正整数 n. 求最小的正数 λ ，使对任何 $\theta_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)(i = 1, 2, \cdots, n)$ ，只要

$$\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 \cdot \cdots \cdot \tan\theta_n = 2^{\frac{n}{2}}, \tag{17}$$

就有

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n \leqslant \lambda. \tag{18}$$

(2003 年 CMO 试题, 黄玉民提供)

第 5 讲例 9 解答

当 $n=1$ 时, $\cos\theta_1=(1+\tan^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3},\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
设 $n\geqslant 2$. 令 $x_i=\tan^2\theta_i(1\leqslant i\leqslant n)$ ，则题设条件变为

$$x_1x_2\ldots x_n=2^n. \tag{19}$$

要求最小的 λ ，使 $\sum\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\leqslant\lambda$.
不妨设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中 x_1 最大，则由式 (19) 有 $x_1\geqslant 2$.
若 $x_2\geqslant 2$ ，则与例 7 中 $y\geqslant 2$ 的情况完全一样（x 即 x_1,y 即 x_2 ），可以得出 $\sum\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}=\varphi(x_2)$ 递减。从而，可调小 x_2 直至 $x_2=2$ ，这时，$\varphi(x_2)$ 一直增加。因此，可设 $x_2\leqslant 2$ ，同样，可设 $x_3\leqslant 2,x_4\leqslant 2,\cdots,x_n\leqslant 2$ 。再由例 7 中 $y\leqslant 2$ 的情况，可逐步调整，使得 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 都调成 $\left(\frac{2^n}{x_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ 。于是，只须求最小的 λ ，使

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{n-1}{\sqrt{1+y}}\leqslant\lambda,$$

第 5 讲例 9 解答

其中 $x \geqslant 2 \geqslant y, xy^{n-1} = 2^n$.

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= \frac{-(n-1)}{2(1+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(n-1)2^n}{y^n} \\
&= \frac{n-1}{2y}\left[\frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} - \frac{y}{\sqrt{(1+y)^3}}\right].
\end{aligned}
$$

$g(y)$ 递增 $\Leftrightarrow g'(y) \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{x^2}{(1+x)^3} \geqslant \frac{y^2}{(1+y)^3} \\
&\Leftrightarrow x^2(1+y)^3 - y^2(1+x)^3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

当 $n = 2$ 时，$xy = 2^2$

$$
\begin{aligned}
&y^2\left[x^2(1+y)^3 - y^2(1+x)^3\right] \\
&= 4^2(1+y)^3 - y(y+4)^3 \\
&= (2+y)(2-y)^3 \\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

第 5 讲例 9 解答

所以，$g(y)$ 递增.
因此，最大值为 $g(2)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ ，即 $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$.
当 $n\geqslant 3$ 时，$xy^{n-1}=2^n$

$$
\begin{aligned}
&y^{3n-5}\left[x^2(1+y)^3-y^2(1+x)^3\right]\\
&=2^{2n}y^{n-3}(1+y)^3-\left(y^{n-1}+2^n\right)^3\\
&=(2^n-y^n)\left(y^{2n-3}+2^ny^{n-3}+3\cdot 2^ny^{n-2}-2^{2n}\right)\\
&\leqslant(2^n-y^n)(2^{2n-3}+2^{2n-3}+3\cdot 2^{2n-2}-2^{2n})\\
&=0.
\end{aligned}
$$

所以，$g(y)$ 递减.
当 $y\to 0$ 时, $g(y)\to n-1$, 即 $\lambda=n-1$.

第 5 讲例 10

设 $a, b \in (0,1)$. 证明:

$$a^a + b^b \geqslant a^b + b^a. \tag{20}$$

第 5 讲例 10 解答

指数是实数, 而不是整数, 通常 “初等方法” 难以奏效, 也就是必须利用导数.
不妨设 $a \geqslant b$ ，考虑函数 $f(x) = x^b - x^a$. (20) 即

$$b^b - b^a \geqslant a^b - a^a, \tag{21}$$

因此, 我们希望 $f(x) = x^b - x^a$ 在 $x \geqslant b$ 时是减函数 (从而由 $a \geqslant b$, (21) 成立). 求导

$$f'(x) = \left(x^b - x^a\right)' = bx^{b-1} - ax^{a-1} = ax^{b-1}\left(\frac{b}{a} - x^{a-b}\right). \tag{22}$$

在 $x \geqslant \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ 时，$f'(x) \leqslant 0$ ，函数 $f(x) = x^b - x^a$ 递减（在 $x = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ 时，函数取最大值）.
因此, 只需证明 $b \geqslant \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}}$. (23)

$$(23) \Leftrightarrow \frac{b}{a} \leqslant b^{a-b}$$

第 5 讲例 10 解答

$$\Leftrightarrow b \leqslant a^{\frac{1}{1-a+b}}. \tag{24}$$

而由贝努里不等式

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{1-a+b}} &= [1-(1-a)]^{\frac{1}{1-a+b}} \\ &\geqslant 1-(1-a)\cdot\frac{1}{1-a+b}, \end{aligned} \tag{25}$$

因此

$$\begin{aligned} (24) &\Leftarrow 1-(1-a)\cdot\frac{1}{1-a+b} \geqslant b \\ &\Leftrightarrow (1-b)(1+b-a) \geqslant 1-a \qquad (26) \\ &\Leftrightarrow 1-b^2-a+ab \geqslant 1-a \\ &\Leftrightarrow a \geqslant b. \qquad (27) \end{aligned}$$

最后一个不等式显然成立, 因此本题结论成立.
我们用 $x^b - x^a$ 而不用 $b^x - a^x$ ，因为前者的导数较为简单，后者将产生对数函数等超越函数, 难以处理.