不等式讲义

LeyuDame

2026 年 6 月 7 日

目录

第 1 讲　不等式与恒等式、二次形式与调整 **3**
1.1　不等式与恒等式 3
1.2　二次形式 6
1.3　调整与转化 8
1.4　习题 1 11

第 2 讲　重要不等式及其应用 **13**
2.1　习题 2 22

第 3 讲　不等式综合技巧 **23**
3.1　习题 3 31

第 4 讲　归纳法与不等式 **34**
4.1　习题 4 43

第 5 讲　导数与不等式 **45**
5.1　习题 5 54

答案 **56**
习题 1 56
习题 2 57
习题 3 59
习题 4 60
习题 5 62

第 1 讲 不等式与恒等式、二次形式与调整

数学中, 常常需要比较两个 (或几个) 量的大小, 或者对某个量进行估计. 这就导出形形色色的不等式.

1.1 不等式与恒等式

不等式与恒等式有密切的联系.

将一个恒等式略去一些项或一些因式, 就可以产生一个不等式. 几乎所有的不等式都可以用这样的方法产生, 用这样的方法证明.

但是, 不等式的证明仍然比恒等式困难得多."恒等式一旦写出来, 就成为显然的." 不等式, 甚至极简单的不等式, 证明起来可没有那么便当, 因为你不知道相应的恒等式.

到哪里去寻找它们呢?

唯一的方法是仔细观察、反复思考, 发现问题的特征, 根据它还原出那个产生这个不等式的恒等式.

例 1.1

已知 $k>a>b>c>0$, 求证:

$$k^2-(a+b+c)k+(ab+bc+ca)>0. \tag{1}$$

证明. 已知条件告诉我们 $k-a>0, k-b>0, k-c>0$. 而 (1) 的左边使我们想到 (以 a,b,c 为根的) 三次方程的韦达定理 (或 a,b,c 的初等对称函数). 于是有

$$\begin{aligned}&0<(k-a)(k-b)(k-c)\\&=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k-abc\\&<k^3-(a+b+c)k^2+(ab+bc+ca)k.\end{aligned}$$

从而 (1) 式成立.

□

注. (i) 我们在一个恒等式中略去先一项 $-abc$, 再略去因数 k , 便导出所需要的不等式.

(ii) 本题也可叙述成如下形式:

如果 d 是正数 a,b,c,d 中最大的, 那么

$$a(d-b)+b(d-c)+c(d-a)\leqslant d^2. \tag{2}$$

这种形式似乎离上面的恒等式更远了.

（iii）如果利用二次三项式的判别式, 那么比较麻烦, 因为 (1) 式左边的判别式并非永远小于 0. 就本质 (而不是就形式) 而言,(1) 是一个三次的不等式.

（iv）处理非齐次不等式的这种手法，后面还会用到.

例 1.2

已知 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ ，求证:

$$(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4 \leqslant 6. \tag{3}$$

证明. 已知条件表明四次式 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 等于 1.(3) 式的左端也是四次式. 我们希望挖掘出这两个四次式的关系. 由于 $(a+b)^4$ 中 a 的奇次项在 $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ 中不出现, 它们需要与 $(a-b)^4$ 中相应的项抵消. 所以，应当利用恒等式

$$\begin{aligned}&(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+d)^4+(c+d)^4+\\&(a-b)^4+(a-c)^4+(a-d)^4+(b-c)^4+(b-d)^4+(c-d)^4\\&=6\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2.\end{aligned} \tag{4}$$

由 (4) 立即得到 (3).

□

例 1.3

证明柯西不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right). \tag{5}$$

证明. $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\cdots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2, \tag{6}$$

从而 (5) 式成立.

注（i）(6) 称为拉格朗日恒等式.

(ii) 证明恒等式 (4) 或 (6) 成立，不必将每个括号展开后得出的项一一写出. 应当利用观察与心算，注意那些未曾抵消的项，更确切地说，只需要注意一两个代表项 ((4) 中的 a^4, a^2b^2 ，(6) 中的 $a_i^2b_j^2, -2a_ib_ia_jb_j$).

(iii) (5) 的证法很多, 这里只介绍利用恒等式的一种.

□

例 1.4

设 $\triangle A_1A_2A_3$ 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的边长分别为 a_1,a_2,a_3 与 b_1,b_2,b_3，面积分别为 $\triangle_1,\triangle_2$. 又记

$$H=a_1^2\left(-b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)+a_2^2\left(b_1^2-b_2^2+b_3^2\right)+a_3^2\left(b_1^2+b_2^2-b_3^2\right).$$

则对于 $\lambda\in\left\{\frac{b_1^2}{a_1^2},\frac{b_2^2}{a_2^2},\frac{b_3^2}{a_3^2}\right\}$，

$$H\geqslant 8\left(\lambda\triangle_1^2+\frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right). \tag{7}$$

证明. 关于三角形的面积, 我们有海伦 (Heron of Alexandria, 约 1 世纪)-秦九韶 (约 1202—约 1261) 公式

$$16\triangle_1^2=2a_1^2a_2^2+2a_2^2a_3^2+2a_3^2a_1^2-a_1^4-a_2^4-a_3^4,$$

$$16\triangle_2^2=2b_1^2b_2^2+2b_2^2b_3^2+2b_3^2b_1^2-b_1^4-b_2^4-b_3^4.$$

记

$$D_i=\sqrt{\lambda}a_i^2-\sqrt{\frac{1}{\lambda}}b_i^2(i=1,2,3),$$

则有恒等式

$$H-8\left(\lambda\triangle_1^2+\frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right)=\frac{1}{2}(D_1^2+D_2^2+D_3^2)-(D_1D_2+D_2D_3+D_3D_1). \tag{8}$$

当 $\lambda=\frac{b_1^2}{a_1^2}$ 时，$D_1=0$, (8) 式成为

$$H-8\left(\lambda\triangle_1^2+\frac{1}{\lambda}\triangle_2^2\right)=\frac{1}{2}(D_2-D_3)^2.$$

于是 (7) 式成立. 同理 (7) 式对 $\lambda=\frac{b_2^2}{a_2^2}$ 或 $\frac{b_3^2}{a_3^2}$ 成立.

□

注. (i) 从例 4 不难导出更一般的结论:
设 $\mu=\min\left\{\frac{b_1^2}{a_1^2},\frac{b_2^2}{a_2^2},\frac{b_3^2}{a_3^2}\right\},\nu=\max\left\{\frac{b_1^2}{a_1^2},\frac{b_2^2}{a_2^2},\frac{b_3^2}{a_3^2}\right\}$，则对于区间 $[\mu,\nu]$ 中的一切 λ, (7) 式成立.
(ii) 上面的证明及 (i) 中的推广都属于宁波大学陈计先生.

例 1.5

方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 的三个根 α,β,γ 均为实数，$a^2=2b+2$. 证明

$$|\,a-c\,|\leqslant 2. \tag{9}$$

证明. 由韦达定理,

$$a^2-2b=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,$$

$$|\,a-c\,|^2=(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)^2.$$

我们有恒等式

$$(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)^2=2(\alpha\beta-1)(\beta\gamma-1)(\gamma\alpha-1)+2-\alpha^2\beta^2\gamma^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2. \tag{10}$$

由已知 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2$，从而 $\alpha\beta\leqslant 1,\beta\gamma\leqslant 1,\gamma\alpha\leqslant 1$. 这样，(10) 导出 $(\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma)^2\leqslant 4$，即 (9) 式成立.

□

例 1.6

$\triangle ABC$ 的边长为 a,b,c，周长为 2. 求证

$$a^2+b^2+c^2+2abc<2. \tag{11}$$

证明. 我们有恒等式 (可与例 1 比较)

$$\begin{aligned}&2(1-a)(1-b)(1-c)\\&=2-2(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-2abc\\&=2-2(a+b+c)+(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2+2abc\right).\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $a+b+c=2$，所以 $(a+b+c)^2=2(a+b+c)$，又三角形的每条边小于周长的一半, 所以 $a<1,b<1,c<1$.(12) 左边为正, 因此 (11) 成立.

又解先将 (11) 改写为三次齐次式

$$\frac{1}{2}(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)+2abc<\frac{1}{4}(a+b+c)^3, \tag{13}$$

即 $\sum a^3-\sum a^2(b+c)+2abc<0$,

亦即 $\prod(b+c-a)>0$.

最后一个不等式显然成立.

□

1.2 二次形式

二次形式 (二次齐次式) 的正定 (负定), 可以用它的矩阵的顺序主子式大于 (小于)0 来证明. 另一种更为常用的方法是配方 (实际上也是借助于恒等式).

例 1.7

证明 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

证明. $a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$$=\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(c-a)^2\geqslant 0.$$

□

例 1.8

A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角. 求证对任意实数 x, y, z,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A - 2zx\cos B \geqslant 0. \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &= \left(x^2 - 2xy\cos C - 2zx\cos B\right) + y^2 + z^2 - 2yz\cos A \\ &= (x - y\cos C - z\cos B)^2 + y^2\sin^2 C + z^2\sin^2 B - 2yz\cos A - \\ &2yz\cos B\cos C \\ &= (x - y\cos C - z\cos B)^2 + (y\sin C - z\sin B)^2. \end{aligned} \tag{15}$$

证明. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy\cos C - 2yz\cos A - 2zx\cos B$

最后一步利用了

$$\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B + C) = \sin B\sin C - \cos B\cos C.$$

由 (15) 立即得到 (14).

□

注. (i) "A, B, C 为 $\triangle ABC$ 的内角" 可改为较弱的条件 "$A + B + C = (2n+1)\pi$".

(ii) (14) 左边是 x, y, z 的二次形式, 它是半正定的, 所以行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C \geqslant 0. \tag{16}$$

(16) 可以说是由 (14) 诱发出来的不等式. 反过来,(16) 成立也导出 (14) 成立. 所以这两个不等式是等价的.(16) 很容易证明, 实际上它是一个等式.

(iii) 在 $A + B + C = 2n\pi$ 时, 我们有

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos C + 2yz\cos A + 2zx\cos B \geqslant 0. \tag{17}$$

(17) 可用与 (14) 相同的手法证明, 也可以在 (14) 中, 用 $\pi - A, \pi - B, \pi - C$ 代替 A,B,C 直接导出.

例 1.9

λ, μ, ν 为任意实数, a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的边, $\triangle$ 为这三角形的面积, 证明

$$\left(\lambda a^2 + \mu b^2 + \nu c^2\right)^2 \geqslant 16(\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\triangle^2, \tag{18}$$

当且仅当 $\lambda : \mu : \nu = (b^2 + c^2 - a^2) : (c^2 + a^2 - b^2) : (a^2 + b^2 - c^2)$ 时等号成立.

证明. λ,μ,ν 的二次形式

$$\begin{aligned}&\left(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2\right)^2-16(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\triangle^2\\&=a^4\lambda^2+2\lambda\left[\mu\left(a^2b^2-8\triangle^2\right)+\nu\left(a^2c^2-8\triangle^2\right)\right]+\left[\mu^2b^4+\nu^2c^4+2\mu\nu\left(b^2c^2-\right.\right.\\&\left.\left.8\triangle^2\right)\right]\\&=a^4\lambda^2+2\lambda\left[\mu a^2b^2\cos 2C+\nu a^2c^2\cos 2B\right]+\left[\mu^2b^4+\nu^2c^4+2\mu\nu b^2c^2\cos 2A\right]\\&=\left(a^2\lambda+b^2\mu\cos 2C+c^2\nu\cos 2B\right)^2+\left(b^2\mu\sin 2C-c^2\nu\sin 2B\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

而 $\frac{c^2\sin 2B}{b^2\sin 2C}=\frac{c^2\sin B\cos B}{b^2\sin C\cos C}=\frac{c\cos B}{b\cos C}=\frac{c^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}$，所以 (18) 中的等号当且仅当 $\lambda:\mu:\nu=(b^2+c^2-a^2):(c^2+a^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$ 时成立.

□

注. (i) (18) 也可借助于 (17) 导出:

$$\begin{aligned}&\left(\lambda a^2+\mu b^2+\nu c^2\right)^2\\&=\lambda^2a^4+\mu^2b^4+\nu^2c^4+2\lambda\mu a^2b^2+2\mu\nu b^2c^2+2\nu\lambda c^2a^2\\&\geqslant -2\lambda\mu a^2b^2\cos 2C-2\mu\nu b^2c^2\cos 2A-2\nu\lambda\cos 2B+2\lambda\mu a^2b^2+2\mu\nu b^2c^2+2\nu\lambda c^2a^2\\&=4\lambda\mu a^2b^2\sin^2C+4\mu\nu b^2c^2\sin^2A+4\nu\lambda c^2a^2\sin^2B\\&=16\triangle^2(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda).\end{aligned}$$

这一证法属于陕西高陵县二中王扬先生.

(ii) (18) 是一个强有力的不等式，利用它可以导出许多不等式. 如令 $\lambda=x,\mu=y,\nu=z$ 便可得到 (17) 与 (14)(参见注 (i)). 令 $\lambda=\mu=\nu$ 便得到

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\triangle(\text{Weitzenböck不等式}).$$

令 $\lambda=b_1^2+c_1^2-a_1^2,\mu=c_1^2+a_1^2-b_1^2,\nu=a_1^2+b_1^2-c_1^2$，这里 a_1,b_1,c_1 为任一三角形的三条边，则

$$\begin{aligned}\sum\mu\nu&=\sum\left[a_1^4-\left(b_1^2-c_1^2\right)^2\right]=\sum\left(a_1^4-b_1^4-c_1^4+2b_1^2c_1^2\right)\\&=2\sum b_1^2c_1^2-\sum a_1^4=16\triangle_1^2,\end{aligned}$$

其中 $\triangle_1$ 为这个三角形的面积. 从而有

$\sum a^2(b_1^2+c_1^2-a_1^2)\geqslant 16\triangle\triangle_1$ (匹窦 (D. Pedoe, 1910—1998) 不等式). (19) 这个不等式也是 (7) 的直接推论.

1.3 调整与转化

在含有多个变元的不等式中, 我们常常将某个或某几个变元的值作适当调整 (增加或减少), 使它 (们) 等于定值或其他变量, 从而原不等式转化为新的、更强的不等式 (由这新不等式可导出原不等式), 它的变元较少或者较易处理. 所谓 “放缩法”, 也是一种调整.

例 1.10

a,b,c 为正实数, 求证

$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.\tag{20}$$

证明. 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，由于 (20) 是齐次的，可以设 $c=1$（否则取 k，使 $kc=1$，并用 ka, kb, kc 代替 a, b, c）。显然 $a \geqslant \frac{a+b+c}{3}$，所以

$$a^{a-\frac{a+b+c}{3}} \geqslant b^{a-\frac{a+b+c}{3}}. \tag{21}$$

因此，(20) 可从 $b^a b^b \geqslant (b^2)^{\frac{a+b+c}{3}}$ (22)

推出 (将 (21) 与 (22) 相乘即得 (20))．由于 $a+b \geqslant \frac{2(a+b+c)}{3}$，(22) 显然成立，所以 (20) 成立.

□

> **注.** (i) 解题需要条件，没有条件时，可以设法创造条件。本题先排序，设 $a \geqslant b \geqslant c$，再设 $c=1$，均是创造条件。
>
> (ii) 本题的要点是将底数 a 调为 b. 两边的底数均为 b 时, 不等式就成为显然的了. 指数可以保留不动, 如果一起调整反倒增添麻烦.

例 1.11

设 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三条边, $m>0$, 求证

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}. \tag{23}$$

证明. 我们将 c 增大到 $c=a+b$. 由于 $\frac{c}{c+m}=1-\frac{m}{c+m}$ 随 c 增大, 所以不等式

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{a+b}{a+b+m} \tag{24}$$

比 (23) 强 ((24) 可以推出 (23)).

显然 $\frac{a}{a+m}>\frac{a}{a+b+m}, \frac{b}{b+m}>\frac{b}{a+b+m}$.

所以 (24) 成立, 从而 (23) 成立.

调整后所得的不等式, 必须是正确的, 必须不比原不等式弱.

□

例 1.12

已知 $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2$ 满足

$$y_2 \geqslant y_1 \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2, \tag{25}$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant y_1+y_2, \tag{26}$$

证明. $x_1x_2x_3x_4 \geqslant y_1y_2$. (27)

□

证明. 首先, 保持和 y_1+y_2 不变, 将 y_1 调大 (这时 y_2 减少) 直至 y_1, y_2 均等于 $y\left(=\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 由于 y_1y_2 在这过程中增大, 所以只需证明

$$x_1x_2x_3x_4 \geqslant y^2. \tag{28}$$

这时 (25)，(26) 成为 $y \geqslant x_4 \geqslant x_3 \geqslant x_2 \geqslant x_1 \geqslant 2$, (29)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 2y. \tag{30}$$

我们分三种情况讨论：

(i) $y \leqslant 4$.

显然 $x_1x_2x_3x_4 \geqslant 2^4 \geqslant y^2$

(ii) $4 < y \leqslant 6$.

保持和 $x_1 + x_4, x_2 + x_3$ 不变，将 x_1, x_2 调整为 2. 然后保持和 $x_3 + x_4$ 不变，将 x_3 调整为 2. 由于积 $x_1x_2x_3x_4$ 经上述调整减少，只需证明

$$2^3 \cdot x_4 \geqslant y^2. \tag{31}$$

由于 $2^3 \cdot x_4 \geqslant 8(2y - 6)$

$$\begin{aligned} &= 16y - 48 = y^2 - \left(y^2 - 16y + 48\right) = y^2 - (y - 4)(y - 12) \\ &\geqslant y^2, \end{aligned}$$

显然得证.

(iii) y > 6.

保持和 $x_1 + x_4, x_2 + x_3$ 不变. 如果这两个和均大于等于 $y + 2$, 将 x_4, x_3 调为 y , 这时 (28) 显然成立. 如果只有 $x_1 + x_4 \geqslant y + 2 (x_2 + x_3 \geqslant y + 2$ 与此类似), 将 x_4 调为 y, x_2 调为 2, 然后保持和 $x_1 + x_3$ 不变, 将 x_1 调为 2; 如果 $x_1 + x_4, x_2 + x_3$ 均小于 $y + 2$, 将 x_1, x_2 调为 2, 然后保持和 $x_3 + x_4$ 不变, 将其中较大的调为 y . 总之,

$$x_1x_2x_3x_4 \geqslant 2^2y(y - 4) = 4y^2 - 16y > y^2.$$

注（i）在调整的过程中, 可以看到 “变化”, 可以看到 “运动”, 所以, 调整法比其他方法显得生动. 但一定要注意严密, 注意叙述. 严密, 就是不能出现疏漏. 叙述应当清楚, 含混不清的地方往往就是出现疏漏的地方.

（ii）两个正数 a, b 的和为一定时，它们的积 $ab = \frac{1}{4}[(a + b)^2 - (a - b)^2]$ 随着差 $|a - b|$ 的增大而减少。这就是例 12 中种种调整的根据。

对于三角不等式, 不少人感到棘手. 据了解, 有两个原因: 第一, 没有掌握一种普遍的解法, 所以遇到题目不知如何下手, 看到解答也只知其然, 不知其所以然; 第二, 有些书籍或刊物上介绍的解答, 用到不少其他的知识, 这就增加了问题的难度.

调整法, 是证明三角不等式的常用方法, 简单而且容易依循.

□

例 1.13

证明在 $\triangle ABC$ 中,

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}. \tag{32}$$

证明. 首先注意在 $A=B=C=60^\circ$ 时, (32) 中等号成立. 因而要证的不等式就是

$$\sin A+\sin B+\sin C\leqslant\sin 60^\circ+\sin 60^\circ+\sin 60^\circ. \tag{33}$$

不妨设 $A\geqslant B\geqslant C$. 于是 $A\geqslant 60^\circ, C\leqslant 60^\circ$. 保持和 $A+C$ 不变 (即 B 不变), 使得 A,C 中一个被调整为 60° , 另一个为 $A+C-60^\circ$. 这时 $A-C\geqslant|A+C-120^\circ|$,

$$\begin{aligned}&\sin A+\sin C=2\sin\tfrac{A+C}{2}\cos\tfrac{A-C}{2}\\&\leqslant 2\sin\tfrac{A+C}{2}\cos\tfrac{(A+C-60^\circ)-60^\circ}{2}\\&=\sin(A+C-60^\circ)+\sin 60^\circ,\end{aligned}$$

即 $\sin A+\sin C$ 经调整后增大. 我们只需证明

$$\sin(A+C-60^\circ)+\sin B\leqslant\sin 60^\circ+\sin 60^\circ. \tag{34}$$

(34) 的左边 $=\sin(120^\circ-B)+\sin B=2\sin 60^\circ\cos(60^\circ-B)\leqslant 2\sin 60^\circ=$ 右边. 于是 (34), (32) 成立.

(34) 的证明就是保持和 $B+(A+C)-60^\circ=120^\circ$ 不变, 将 B 调为 60° 时, $\sin(A+C-60^\circ)+\sin B$ 增大.

□

注. (i) 从上面的解法, 容易看出 (32) 中当且仅当 $A=B=C=60^\circ$ 时等号成立.
(ii) 我们顺便解决了一个极值问题:
在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A+\sin B+\sin C$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 并且仅在 $A=B=C=60^\circ$ 时达到.
如果运用正弦定理, 在 (32) 的两边乘以 $2R$, 就得到:
圆内接三角形中, 以正三角形的周长为最大, 最大值为 $3\sqrt{3}R$.
在习题中, 还有一些三角不等式.

1.4 习题 1

练习 1.1. 证明: 对任意实数 $t, t^4-t+\frac{1}{2}>0$.

练习 1.2. a,b,c 为正数, 证明:

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}>\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

练习 1.3. n 个非负实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$, 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n^2}\leqslant\frac{1}{1+x_1}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}.$$

练习 1.4. 记 $a=2001$. 设 A 是适合下列条件的正整数对 (m,n) 所组成的集合:

(i) $m<2a$; (ii) $2n \mid (2am-m^2+n^2)$; (iii) $n^2-m^2+2mn \leqslant 2a(n-m)$.

令 $f=\frac{2am-m^2-mn}{n}$, 求 $\min_{(m,n)\in A} f$ 及 $\max_{(m,n)\in A} f$.

练习 1.5. 证明: 在 $\triangle ABC$ 中,

(a) $\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{3}{2}$;

(b) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

练习 1.6. 证明: 在锐角三角形 ABC 中, $\sin A+\sin B+\sin C>2$.

练习 1.7. 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A+\sin B+\sin C-\cos A-\cos B-\cos C \leqslant \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$, 并且当三角形为锐角三角形时, 上式左边大于 1.

练习 1.8. 设 x,y,z 为实数, $k_1,k_2,k_3 \in \left(0,\frac{1}{2}\right), k_1+k_2+k_3=1$. 证明: $k_1k_2k_3(x+y+z)^2 \geqslant xyk_3(1-2k_3)+yzk_1(1-2k_1)+zxk_2(1-2k_2)$.

练习 1.9. 设数 a 具有以下性质: 对于任意的四个实数 x_1,x_2,x_3,x_4 , 总可以取整数 k_1,k_2,k_3,k_4 , 使得 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}((x_i-k_i)-(x_j-k_j))^2 \leqslant a$ 。求这样的 a 的最小值。

练习 1.10. a,b,c 均不小于 1, 证明:

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3+3abc \geqslant a^3+b^3+c^3+3a^2b^2c^2.$$

11.（习题 5 第 5 题的加强）证明: 在 $0<x<y<z<\frac{\pi}{2}$ 时,

$$\sqrt{2}+2\sin x\cos y+2\sin y\cos z>\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z.$$

练习 1.11. 已知 $x,y,z \geqslant 0$, 证明 Schur 不等式

$$\sum x(x-y)(x-z) \geqslant 0$$

或

$$\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz \geqslant 0.$$

练习 1.12. 证明: 在 $\triangle ABC$ 中, 有

(a) $\sum a^3-2\sum a^2(b+c)+9abc \leqslant 0$.

(b) $-\sum a^3+\sum a^2(b+c)-2abc>0$.

这一讲介绍如何应用一些重要的不等式去解题.

不等式, 虽然源自恒等式, 但它已经发展、壮大, 具有自己的特点, 成为独立的分支, 不需要一一求诸恒等式. 一些著名的不等式, 如排序不等式、算术-几何平均不等式、柯西不等式、闵可夫斯基不等式等, 具有广泛的应用, 它们是不等式理论成熟的标志.

第 2 讲 重要不等式及其应用

例 2.1

设有两个有序数组 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 及 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$.

证明. : 对于 $1, 2, \cdots, n$ 的任一排列 $i_1, i_2, \cdots, i_n$,

$$\begin{aligned} & a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \quad \text{(同序的和)} \\ \geqslant\ & a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n} \quad \text{(乱序的和)} \\ \geqslant\ & a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \quad \text{(逆序的和).} \end{aligned}$$

□

证明. 对于任意 $k, h \in \{1, 2, \cdots, n\}$,

$$(a_1b_1 + a_kb_h) - (a_1b_h + a_kb_1) = (a_1 - a_k)(b_1 - b_h) \geqslant 0.$$

所以, 我们可将 $a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \cdots + a_nb_{i_n}$ 中第一项的因数 b_{i_1} 与 b_1 对调, 和不会减少. 同样, 可将第二项调为 $a_2b_2, \cdots$, 依此类推即得例 1 中第一个不等式. 同样可证另一个不等式.

例 1 就是排序不等式, 也称为排序原理.

□

例 2.2

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相等的自然数, 求证:

$$a_1^2 + \frac{a_2^2}{2} + \frac{a_3^2}{3} + \cdots + \frac{a_n^2}{n} \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \tag{1}$$

证明. 使用排序不等式需将每一项适当地分成两个因数的积. 数列 $\{a_i^2\}$ 的大小次序与 $\{a_i\}$ 相同、与 $\{\frac{1}{a_i}\}$ 相反. 所以由排序不等式

$$\sum a_i = \sum \frac{a_i^2}{a_i} \leqslant \sum \frac{a_i^2}{a_{j_i}}, \tag{2}$$

其中 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 满足

$$a_{j_1} < a_{j_2} < \cdots < a_{j_n}. \tag{3}$$

由于 (3) 中的数都是自然数, $a_{j_i} \geqslant i$, 从而由 (2) 得 $\sum a_i \leqslant \sum \frac{a_i^2}{i}$.

□

例 2.3

设 a,b,c 为正数, 证明:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}. \tag{4}$$

证明. 由对称性, 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 这时 $\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{a+c}\geqslant\frac{1}{a+b}$.

所以由排序不等式, 得

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}. \tag{5}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}. \tag{6}$$

将 (5), (6) 相加即得 (4).

□

例 2.4

设 s,t 为正数, n 为自然数. 证明:

$$s^{n+1}+nt^{n+1}\geqslant(n+1)t^ns. \tag{7}$$

证明. 由于 s,t 与 $s^k,t^k(1\leqslant k\leqslant n)$ 同序, 所以

$$(s-t)(s^k-t^k)\geqslant0. \tag{8}$$

于是

$$\begin{aligned}
&s^{n+1}+nt^{n+1}-(n+1)t^ns\\
&=s\left(s^n-t^n\right)-nt^n(s-t)\\
&=(s-t)\left[s\left(s^{n-1}+s^{n-2}t+\cdots+t^{n-1}\right)-nt^n\right]\\
&=(s-t)\left[\left(s^n-t^n\right)+\left(s^{n-1}-t^{n-1}\right)t+\cdots+(s-t)t^{n-1}\right]\\
&\geqslant0,
\end{aligned}$$

即 (7) 式成立.

排序不等式的适用对象是代数和, 其中每一个加项都可以表示为两个因式的积. 例 4 虽然没有直接援引排序不等式, 但用到同样的思想 (即 (8)).

注例 4 也可以直接利用排序不等式, 即将数组 $\overbrace{s,t,t,\cdots,t}^{n\text{个}}$ 反复自乘 $n+1$ 次. 在每次均用 s 乘 s 的幂时所得各项之和最大, 每次均用 s 乘 t 的幂时所得各项之和最小.

□

例 2.5

设 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$. 求 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$, 使得 “距离” $d=(p_1-x_1)^2+(p_2-x_2)^2+\cdots+(p_n-x_n)^2$ 为最小.

证明. 设 $p=\frac{1}{n}(p_1+p_2+\cdots+p_n)$. 很自然地猜测在 $x_1=x_2=\cdots=x_n=p$ 时, d 为最小. 即 $(p_1-x_1)^2+(p_2-x_2)^2+\cdots+(p_n-x_n)^2$

$$\geqslant (p_1-p)^2+(p_2-p)^2+\cdots+(p_n-p)^2\,. \tag{9}$$

不妨设 $p=0$，否则用 p_i-p 代替 p_i, x_i-p 代替 x_i . 因此，只需证明

$$\sum (p_i-x_i)^2 \geqslant \sum p_i^2. \tag{10}$$

(10) 左边 $=\sum p_i^2+\sum x_i^2-2\sum x_ip_i \geqslant \sum p_i^2-2\sum x_ip_i$ ，只需证明

$$\sum x_ip_i \leqslant 0. \tag{11}$$

由于 $\{p_i\}$ 与 $\{x_i\}$ 逆序, 所以对 1,2, $\cdots$,n 的任一排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$, 均有

$$\sum x_ip_i \leqslant \sum p_ix_{j_i}. \tag{12}$$

逐次取 $j_i=i, i+1, \cdots, n, 1, \cdots, i-1 (i=1,2,\cdots,n)$ ，然后将所得的 n 个形如 (12) 的不等式相加，得

$$n\sum x_ip_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j_i=1}^{n} x_{j_i} = (\sum_{i=1}^{n} x_i)\cdot(\sum_{i=1}^{n} p_i) = 0$$

(最后一步是由于 $p=0$)，这就是 (11). 因此 (10)，(9) 均成立.

将若干个形如 (12) 的不等式相加以产生所需要的结果, 是例 5 的关键. 这一方法在例 3 中实际上已经用过.

用这个方法, 不难得出.

□

例 2.6

如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ ，那么

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \sum a_i \cdot \sum b_i, \tag{13}$$

它称为契比雪夫 (P. Y. Chebyshev, 1821—1894) 不等式. 在 $\{a_i\}$ 或 $\{b_i\}$ 中恰有一个改为相反的顺序时,(13) 的 "$\geqslant$" 也改为 "$\leqslant$".

算术-几何平均不等式也是经常使用的不等式 (简称为 A-G 不等式):

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为非负实数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{14}$$

$n=2$ 或 3 的情况, 在中学里尤为常见.

例 2.7

设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ 为非负实数，求证

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) \\ \leqslant & (n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

证明. $(n+1)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}\right)-$

$$n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right)$$

$$=a_{n+1}-(n+1)\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots a_{n+1}}+n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

设法化去根号. 为此, 设 $a_1a_2\cdots a_n=t^{n(n+1)}, a_{n+1}=s^{n+1}, s,t\geqslant 0$, 则

上式 $=s^{n+1}-(n+1)t^ns+nt^{n+1}\geqslant 0.$

最后一步是根据 (7).

由 (15)，我们得到

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\right) \\ \geqslant & \cdots\geqslant 3\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}\right) \\ \geqslant & 2\left(\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1a_2}\right)\geqslant 0. \end{aligned}$$

这是 A-G 不等式的一种证明 (据统计,A-G 不等式的证明有几十种).

□

例 2.8

设 a,b,c 都是正数. 证明

$$abc\geqslant(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b). \tag{16}$$

证明. 如果 $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ 中有负数，设 $a+b-c<0$ ，那么 $c>a+b, b+c-a$ 与 $c+a-b$ 均为正数。(16) 右边为负，结论显然成立.

设 $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ 均非负. 由 A-G 不等式,

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}\leqslant\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}=b. \tag{17}$$

同样有 (注意轮换性)

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}\leqslant c, \tag{18}$$

$$\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}\leqslant a. \tag{19}$$

将 (17)，(18)，(19) 三式相乘即得 (16).

□

例 2.9

已知 a, a' 为正，并且行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{20}$$

求证行列式 $\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix} \leqslant 0$, (21)

这里行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ 即表达式 $ac - b^2$

证明. 记 $k = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.

因为

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a-a' & b-b' \\ b-b' & c-c' \end{vmatrix} = (a-a')(c-c') - (b-b')^2 \\ &= 2k - ac' - a'c + 2bb', \end{aligned} \tag{22}$$

而由 A-G 不等式有 $ac' + a'c \geqslant 2\sqrt{aa'cc'}$

$$\begin{aligned} &= 2\sqrt{(k+b^2)(k+b'^2)} \\ &= 2\sqrt{k^2 + b^2b'^2 + k(b^2+b'^2)} \\ &\geqslant 2\sqrt{k^2 + b^2b'^2 + 2kbb'} \\ &= 2k + 2bb'. \end{aligned} \tag{23}$$

由 (22)，(23) 导出 (21).

□

例 2.10

设 $x_i \geqslant 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$. 证明樊畴 (1914—2010) 不等式

$$\frac{\prod (x_i - 1)}{(\sum (x_i - 1))^n} \leqslant \frac{\prod x_i}{(\sum x_i)^n}. \tag{24}$$

这里 $\prod$ 是连乘符号，$\prod x_i = x_1 x_2 \cdots x_n$

证明. (24) 等价于 $\left(\frac{\prod (x_i-1)}{\prod x_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{\sum (x_i-1)}{\sum x_i}$. (25)

由 A-G 不等式，

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\prod (x_i-1)}{\prod x_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\prod \frac{x_i-1}{x_i}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum \frac{x_i-1}{x_i} = 1 - \frac{1}{n}\sum \frac{1}{x_i}. \end{aligned} \tag{26}$$

而

$$\frac{\sum (x_i - 1)}{\sum x_i} = \frac{\sum x_i - n}{\sum x_i} = 1 - \frac{n}{\sum x_i}. \tag{27}$$

所以 (25) 可由 (26)，(27) 及不等式

$$\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{n}{\sum x_i} \tag{28}$$

推出.

(28) 等价于 $\sum x_i\cdot\sum\frac{1}{x_i}\geqslant n^2$. (29)

这个不等式不难从 A-G 不等式导出

$$\sum x_i\cdot\sum\frac{1}{x_i}\geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{x_n}}=n^2.$$

□

注. (i) (29) 也有很多应用. 例如设 a,b,c 为正数，则

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)\geqslant 9.$$

(ii) $x_i\geqslant 1$ 可改为 $1>x_i\geqslant\frac{1}{2}(i=1,2,\cdots,n)$. 但若 $\frac{1}{2}\geqslant x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ ，则 (24) 中不等号 “$\leqslant$” 改为 “$\geqslant$”. 参见习题 4 第 9 题.

(iii) 在不等式的证明中，往往需要作一些恒等变形，需要将它变为等价的或更强的不等式，以便于应用一些著名的不等式.

A-G 不等式是幂平均不等式的特殊情况.

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为非负数，则对于 $r\neq 0, A_r=\left(\frac{1}{n}\sum a_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$ 称为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 r 次幂平均，并约定 $A_0=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ （容易知道 $\lim_{r\to 0^+}A_r=A_0$)。我们有

定理 A_r 是 r 的增函数.

这个定理就是幂平均不等式, 其中 $\frac{1}{n}$ 还可以用和为 1 的正数 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 来代替, 即 $A_r=(\sum p_ia_i^r)^{\frac{1}{r}}$ 是 r 的增函数.

一般的幂平均不等式, 在中学竞赛里几乎不出现, 所以本书不作详细讨论.

下面的一些例子需要利用柯西不等式 (第 1 讲例 3).

例 2.11

设 $a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ ，并且

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1, \tag{30}$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right)^2\geqslant\frac{(n^2+1)^2}{n}. \tag{31}$$

证明. 将 (31) 的两边展开并化简成

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2}\geqslant\frac{1}{n}+n^3. \tag{32}$$

由柯西不等式及条件 (30)，得 $\sum 1^2\cdot\sum a_i^2\geqslant(\sum a_i)^2=1$. 所以

$$\sum a_i^2\geqslant\frac{1}{n}. \tag{33}$$

同样 $\sum 1^2 \cdot \sum \frac{1}{a_i^2} \geqslant \left(\sum \frac{1}{a_i}\right)^2$. (34)

而由条件 (30) 及不等式 (29)，得 $\sum \frac{1}{a_i} \geqslant n^2$. (35)

由 (34)，(35) 导出 $\sum \frac{1}{a_i^2} \geqslant n^3$. (36)

由 (33)，(36) 导出 (32)，(31).

□

注. (i) 实际上，我们证明了两个幂平均不等式，即 $A_2 \geqslant A_1, A_{-1} \geqslant A_{-2}$.

(ii) 条件 (30) 可结合 A-G 不等式 (29) 或柯西不等式使用. 下面的例 12 也是如此.

例 2.12

设 $l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n = 1$ ，这里 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为已知数。求 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ 的最小值。

证明. $(l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n)^2$

$$\leqslant \left(l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right),$$

所以 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{l_1^2+l_2^2+\cdots+l_n^2}$,

当且仅当 $x_i = l_i(l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2)^{-1}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 时等号成立.

注本题的几何意义是 n 维空间中, 原点到超平面的垂直距离是连接原点与这超平面上任一点的线段中最短的.

□

例 2.13

证明关于两个三角形的匹窦不等式

$$a^2(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2) + b^2(c_1^2 + a_1^2 - b_1^2) + c^2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) \geqslant 16\triangle\triangle_1, (37)$$

这里 $a, b, c, \triangle$ 及 $a_1, b_1, c_1, \triangle_1$ 分别为两个三角形的边长与面积.

证明. 这个不等式在第 1 讲中已经出现过 (第 1 讲 (19)). 宁波大学陈计先生利用柯西不等式给出如下简单优雅的证明:

$$\begin{aligned}
&16\triangle\triangle_1 + 2a^2a_1^2 + 2b^2b_1^2 + 2c^2c_1^2\\
&\leqslant \left(16\triangle_1^2 + 2a_1^4 + 2b_1^4 + 2c_1^4\right)^{\frac{1}{2}}\left(16\triangle^2 + 2a^4 + 2b^4 + 2c^4\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2\right)\left(a^2 + b^2 + c^2\right),
\end{aligned}$$

所以 $16\triangle\triangle_1 \leqslant a^2(b_1^2 + c_1^2 - a_1^2) + b^2(c_1^2 + a_1^2 - b_1^2) + c^2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)$.

类似于例 13, 一些辅助的恒等变形, 在不等式的证明中常常需要.

□

例 2.14

设 $n \geqslant 2, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数，并且

$$\sum x_i = 1, \tag{38}$$

求证 $\sum \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$. (39)

证明. 由条件 (38) 及柯西不等式, 得

$$\sum \sqrt{x_i} \leqslant (\sum 1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum x_i\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}. \tag{40}$$

由于 $\sum(1-x_i) = n - \sum x_i = n-1$,

结合柯西不等式得

$$\sum \sqrt{1-x_i} \leqslant (\sum 1)^{\frac{1}{2}} \left[\sum (1-x_i)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n(n-1)}. \tag{41}$$

于是由 (29)(或直接用柯西不等式) 得

$$\sum \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{n^2}{\sum \sqrt{1-x_i}} \geqslant \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}}. \tag{42}$$

由 (40)，(41)，(42) 推出

$$\begin{aligned} &\sum \tfrac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} = \sum \tfrac{1}{\sqrt{1-x_i}} - \sum \sqrt{1-x_i} \\ &\geqslant \tfrac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} \\ &= \tfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \geqslant \tfrac{\sum \sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

□

例 2.15

正数 x, y, z 满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ，求 $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$ 的最小值.

证明. 容易猜到 $x = y = z = \sqrt{\frac{1}{3}}$ 时, $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2}$ 取得最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 为了证明这一点, 首先利用柯西不等式得

$$\sum \frac{x}{1-x^2} \cdot \sum x^3(1-x^2) \geqslant \sum x^2 = 1. \tag{43}$$

所以只需要证明 $\sum x^3(1-x^2) \leqslant \frac{2}{3\sqrt{3}}$ (44)

(这种 “去分母” 的方法在其他问题中也会用到, 如习题 2 第 2 题).

(44) 等价于 $\frac{2}{3\sqrt{3}} + \sum x^5 \geqslant \sum x^3$. (45)

而由 A-G 不等式

$$\frac{2x^2}{3\sqrt{3}} + x^5 \geqslant 3\sqrt[3]{\left(\frac{x^2}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{x^2}{3\sqrt{3}}\right)x^5} = x^3,$$

所以 (45) 成立, 证毕.

辅助的恒等变形似乎平常, 实际做起来却并不容易. 尝试一下例 15 就会有较深的体会 (另一种解法见习题 2 第 12 题).

柯西不等式中 $\sum a_ib_i$ 的项 a_ib_i 如何拆成两个因式 a_i 与 b_i 之积，可以说是应用这个不等式的主要技巧（在例 15 的 (44) 中，我们将 $\sum x^2$ 中的 x^2 表示为 $\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$ 与 $\sqrt{x^3(1-x^2)}$ 的积). 正因为 a_ib_i 可以按照我们的需要加以分解, 柯西不等式的应用更为广泛.

□

例 2.16

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数, σ_k 为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的初等对称多项式（见第 15 讲 (14)), $p_k = \frac{\sigma_k}{C_n^k}$. 证明

$$p_1 \geqslant p_2^{\frac{1}{2}} \geqslant p_3^{\frac{1}{3}} \geqslant \cdots \geqslant p_n^{\frac{1}{n}}, \tag{46}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

证明. 首先证明 $p_k^2 \geqslant p_{k-1}p_{k+1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, (47)

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

对 n 用归纳法. 假设对 n-1 个数相应结论成立, 相应的量记为 σ_k', p_k' , 则

$$\sigma_k = \sigma_k' + a_n\sigma_{k-1}', p_k = \frac{n-k}{n}p_k' + \frac{k}{n}a_np_{k-1}',$$

从而 $n^2(p_k^2 - p_{k+1}p_{k-1}) = A + Ba_n + Ca_n^2$,

其中 $A = (n-k)^2p_k'^2 - [(n-k)^2 - 1]p_{k+1}'p_{k-1}' \geqslant p_k'^2$

$$\begin{aligned} B &= 2k(n-k)p_{k-1}'p_k' - (n-k+1)(k+1)p_{k-1}'p_k' - \\ &(n-k-1)(k-1)p_{k-2}'p_{k+1}', \\ C &= k^2p_{k-1}'^2 - (k^2-1)p_{k-2}'p_k' \geqslant p_{k-1}'^2. \end{aligned}$$

因为 $p_{k-2}'p_{k+1}' \leqslant \frac{p_{k-1}'^2}{p_k'} \cdot p_{k+1}' \leqslant \frac{p_{k-1}'}{p_k'} \cdot p_k'^2 = p_{k-1}'p_k'$ ，所以 $B \geqslant -2p_{k-1}'p_k'$. 于是

$$n^2(p_k^2 - p_{k-1}p_{k+1} \geqslant (p_{k-1}'a_n - p_k')^2 \geqslant 0.$$

等号仅在 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$ 并且 $a_n = \frac{p_k'}{p_{k-1}'}$ 时成立，即 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时成立.

由 (47) 可得

$$(p_0p_2)(p_1p_3)^2(p_2p_4)^3 \cdots (p_{k-1}p_{k+1})^k \leqslant p_1^2p_2^4p_3^6 \cdots p_k^{2k},$$

所以 $p_{k+1}^k \leqslant p_k^{k+1}$,

即 (46) 成立.

(47) 是牛顿得出的, 实际上对实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都成立 (证明仅需稍作修改).(46) 称为马克劳林 (Maclaurin,1698—1746) 不等式.

关于归纳法与不等式, 参见第 4 讲.

□

2.1 习题 2

练习 2.1. 已知 x,y,z 为正数, $xyz(x+y+z)=1$, 求 $(x+y)(x+z)$ 的最小值.

练习 2.2. a,b,c,d 为正数，证明 $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2$.

练习 2.3. a,b,c 为正数，证明 $\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c}\geqslant 2$.

练习 2.4. $0\leqslant a_i<1(i=1,2,\cdots,n)$, $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 证明 $\sum\frac{a_i}{1-a_i}\geqslant\frac{nS}{n-S}$.

练习 2.5. $S_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ ， 证明 $n(n+1)^{\frac{1}{n}}-n<S_n<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}$.

练习 2.6. 正数 a,b,c,A,B,C 满足 $a+A=b+B=c+C=k$ ， 证明 $aB+bC+cA<k^2$.

练习 2.7. $a\geqslant 0,b\geqslant 0$. 证明 $(a+b)(a^4+b^4)\geqslant(a^2+b^2)(a^3+b^3)$.

练习 2.8. 设 $a_i,b_i,c_i,\triangle_i(i=1,2)$ 为三角形的边长与面积，以 a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2 为边的三角形面积为 $\triangle$. 证明: $\sqrt{\triangle_1}+\sqrt{\triangle_2}\leqslant\sqrt{\triangle}$.

练习 2.9. a,b,c 为正数， $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, n 为自然数，证明

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\geqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\cdot s^{n-1}.$$

练习 2.10. 已知 $x_1x_2\cdots x_n=Q^n$ ， 其中 $x_i\geqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$ 。记 $x_{n+1}=x_1$ 。证明当 n 大于 2 时， $\sum_{i=1}^n x_ix_{i+1}-\sum_{i=1}^n x_i\geqslant\frac{n}{2}(Q^2-1)$ 。

练习 2.11. 设 $\triangle ABC$ 的边长为 a,b,c , 相应的中线长为 m_a,m_b,m_c . 证明

$$4m_bm_c\geqslant 2a^2-4b^2-4c^2+9bc.$$

练习 2.12. 试用算术-几何平均不等式来解例 15.

练习 2.13. 设 a,b,c 为正实数，并且 $abc=1$. 证明 $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 1$.

练习 2.14. 整数 $n\geqslant 3,a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为实数， $2\leqslant a_i\leqslant 3(1\leqslant i\leqslant n),s=a_1+a_2+\cdots+a_n$. 证明: $\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}+\frac{a_2^2+a_3^2-a_4^2}{a_2+a_3-a_4}+\cdots+\frac{a_n^2+a_1^2-a_2^2}{a_n+a_1-a_2}\leqslant 2s-2n.$

第 3 讲 不等式综合技巧

不等式的研究发展极快. 不等式的数量越来越多, 形状千姿百态, 证法千差万别. 证明不等式需要灵活地运用各种技巧, 更需要匠心独运, 独辟蹊径. 正因为如此, 在各种数学竞赛中, 不等式频频出现. 除了第 17、18 讲所介绍的方法, 我们再举一些例子以供借鉴.

例 3.1

设 c,d 为正数, 并且

$$c+d\leqslant a, \tag{1}$$

$$c+d\leqslant b, \tag{2}$$

证明. $ca+db\leqslant ab$. (3)

□

证明. 这道题, 如果说有困难的话, 就在于将它想得过于困难 (甚至有人搬用柯西不等式). 其实, 这是一个非常简单的不等式 (参见第 1 讲例 5).

设 $a\leqslant b$ ，则由于 c, d, a, b 均为正数，$ca+db\leqslant (c+d)b\leqslant ab$.

□

例 3.2

已知 $a+b+c>0, ax^2+bx+c=0$ 有实数根. 证明

$$\max\{a,b,c\}\geqslant \frac{4(a+b+c)}{9}. \tag{4}$$

证明. 首先, 我们可以设

$$a+b+c=1, \tag{5}$$

否则用 $\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c}$ 代替 a,b,c. 这样，只需证明

$$\max\{a,b,c\}\geqslant \frac{4}{9}. \tag{6}$$

分情况来讨论:

(i) 如果 $b\geqslant \frac{4}{9}$ ，(6) 已经成立.

(ii) 如果 $b<\frac{4}{9}$ ，由已知 $ax^2+bx+c=0$ 有实根得 $\left(\frac{4}{9}\right)^2>b^2\geqslant 4ac$

即 $\frac{4}{81} \geqslant ac$. (7)
又 $a+c=1-b>1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$, (8)
结合 (7), (8) 得 $\left(\frac{5}{9}-c\right)c<ac\leqslant\frac{4}{81}$,
即 $c^2-\frac{5}{9}c+\frac{4}{81}=(c-\frac{1}{9})(c-\frac{4}{9})>0$.
从而 $c>\frac{4}{9}$ 或 $c<\frac{1}{9}$.
在 $c<\frac{1}{9}$ 时, 由 (8) 得 $a>\frac{5}{9}-c>\frac{4}{9}$.
因此 (6) 成立.

□

注. (i) 更一般地, 如果 m 次实系数多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 仅有实根, 那么

$$\max\{a_0,a_1,\ldots,a_m\}\geqslant\frac{\mathrm{C}_m^s(m-s)^{m-s}(s+1)^s}{(m+1)^s}\cdot(a_0+a_1+\cdots+a_m),$$

其中 $s=\left[\frac{m}{2}\right]$.

(ii) 在题中表达式为 a,b,c 的齐次式时, 常常设 $a+b+c=1$ 。这种 “标准化”, 不仅使书写简单, 而且有助于发现正确的解题路径, 特别是它增添一个有利的条件 $a+b+c=1$ 。

(iii) 枚举法也给我们增添了条件. 情况 (i) 的条件 $b\geqslant\frac{4}{9}$ 直接引出结论. 情况 (ii) 的条件也提供了方便. 请参看第 3 讲.

例 3.3

已知 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,

$$\sum_{i=1}^n b_i=0,\sum_{i=1}^n|b_i|=1, \tag{9}$$

求证 $\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leqslant\frac{1}{2}(a_1-a_n)$. (10)

证明. 不等式中有负数出现是一件讨厌的事, 你必须小心翼翼, 防止在乘以负数时忘记改变不等号的方向. 如果可能的话, 我们希望将负数换为正数, 或者将正数、负数分开处理.

a_n （甚至 a_1 ）未必为正数。但我们可以将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 换成 $a_1+M,a_2+M,\cdots,a_n+M$, 这里 M 是一个足够大（大于等于 $-a_n$ ）的数, 使得所有 a_i+M 成为非负数。结合 (9) 的第一个等式, 得 $\sum_{i=1}^n(a_i+M)b_i=\sum_{i=1}^n a_ib_i+M\sum_{i=1}^n b_i=\sum_{i=1}^n a_ib_i$ 。又有（平移不改变距离）$(a_1+M)-(a_n+M)=a_1-a_n$, 所以将 a_i 换为 $a_i+M(i=1,2,\cdots,n)$ 对 (10) 并无影响, 我们不妨假定 $a_n=0$ （即取 $M=-a_n$)。

又可以假定 $\sum_{i=1}^n a_ib_i\geqslant 0$. 否则将 b_i 换成 $-b_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是只需证

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\frac{1}{2}a_1. \tag{11}$$

将 b_i 中正数, 负数分开. 记

$$P=\sum_{b_i\geqslant0}b_i,N=-\sum_{b_i<0}b_i,$$

则 (9) 即

$$P-N=0,P+N=1. \tag{12}$$

从而

$$P = N = \frac{1}{2}. \tag{13}$$

于是 $\sum a_i b_i = \sum_{b_i>0} a_i b_i + \sum_{b_i<0} a_i b_i \leqslant a_1 \sum_{b_i<0} b_i = a_1 P = \frac{1}{2} a_1$.

注平移 (即将 a_i 变为 $a_i + M$), 将正、负部分分开都是惯用的手法. 本例中的 M 可以随意选择, 取 $M = -a_n$ 较为简单.

处理 $\sum a_i b_i$ 的另一种方法是阿贝尔 (N. H. Abel, 1802—1829) 求和法.

□

例 3.4

设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, B_k = \sum_{i=1}^{k} b_i$ （约定 $B_0 = 0$ ），并且

$$B' \leqslant B_k \leqslant B (k = 1, 2, \ldots, n).$$

试证明阿贝尔不等式

$$a_1 B' \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant a_1 B. \tag{14}$$

证明. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i (B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) B_i + a_n B_n$, (15)

所以 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant B \left[\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) + a_n\right] = a_1 B$.

同样可证 (14) 的另一半.

(15) 就是著名的阿贝尔求和法.

在例 3 中, $B = P = N = \frac{1}{2}$, $B' = -\frac{1}{2}$, 所以由 (14) 立即得到 (10) (先作平移, (14) 中的 a_1 即 (10) 中 $a_1 - a_n$).

类似地，取 $b_k = \sin kx (0 < x < 2\pi$ ，则易知 $\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$. 所以由阿贝尔不等式 (14) 得 $\left|\sum_{k=m+1}^{m+n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{(m+1) \sin \frac{x}{2}}$.

□

例 3.5

设 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0, b_1 \geqslant a_1, b_1 b_2 \geqslant a_1 a_2, \cdots, b_1 b_2 \cdots b_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n$.

证明. $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \geqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. (16)

□

证明. 令 $c_i = \frac{b_i}{a_i} (1 \leqslant i \leqslant n)$ ， 则

$$c_1 \geqslant 1, c_1 c_2 \geqslant 1, \ldots, c_1 c_2 \ldots c_n \geqslant 1. \tag{17}$$

要证明的 (16) 等价于

$$(c_1 - 1) a_1 + (c_2 - 1) a_2 + \cdots + (c_n - 1) a_n \geqslant 0. \tag{18}$$

由 A-G 不等式及条件 (17) 得

$$(c_1-1)+(c_2-1)+\cdots+(c_k-1)\geqslant k\sqrt[k]{c_1c_2\cdots c_k}-k\geqslant 0.$$

在阿贝尔不等式 (14) 中取 $B'=0$ 即得 (18).

□

例 3.6

设 $a+b+c>0, ab+bc+ca>0, abc>0$. 求证: $a>0, b>0, c>0$.

证明. 已知条件使我们联想到三次方程 (第 1 讲例 1 也是如此)

$$\begin{aligned}&x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\\&\equiv(x-a)(x-b)(x-c)=0\end{aligned}\tag{19}$$

(这里 "≡" 表示恒等), a,b,c 是它的三个根. 而在 $x\leqslant 0$ 时,

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc\leqslant -abc<0.$$

因此 (19) 没有不大于 0 的根, 所以 a,b,c 均为正数.

□

例 3.7

设 $x^2+y^2\leqslant 1$, 求证:

$$|\,x^2+2xy-y^2\,|\leqslant\sqrt{2}.\tag{20}$$

证明. 如果 $x^2+y^2=\rho^2<1$, 将 x,y 同时乘以大于 1 的数 $\frac{1}{\rho}$ 后, 它们的平方和等于 1 ($\rho=0$ 时 $x=y=0$, (20) 显然成立). 因此总可以假设

$$x^2+y^2=1.\tag{21}$$

(21) 启发我们采用三角函数: 令

$$x=\sin\alpha, y=\cos\alpha, 0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}.\tag{22}$$

而 $x^2-y^2, 2xy$ 则使我们想到倍角的余弦与正弦, 即 (20) 等价于

$$|\cos 2\alpha+\sin 2\alpha|\leqslant\sqrt{2}.\tag{23}$$

(23) 显然成立. 事实上, 更一般的结果

$$|\,a\cos\varphi+b\sin\varphi\,|=\sqrt{a^2+b^2}\left|\sin\left(\varphi+\arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

是众所周知的.

例 7 虽然简单, 却有两点值得注意: (i) 将问题的条件简化为极端情况 (21); (ii) 揣摩题目的特点, 作适当的代换.

□

例 3.8

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 均为正数，求证：

$$\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2 x_3} + \frac{x_2^2}{x_2^2 + x_3 x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_n x_1} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1 x_2} \leqslant n - 1. \tag{24}$$

证明. 令 $\frac{x_{i+1}x_{i+2}}{x_i^2} = y_i (i = 1, 2, \cdots, n, x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2)$,

则 (24) 成为 $\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} + \cdots + \frac{1}{1+y_n} \leqslant n - 1.$ (25)

而由 y_i 的定义知 $y_1 y_2 \cdots y_n = 1.$ (26)

(25) 的左边共 n 项, 每项均小于 1 (因为分母 $1 + y_i > 1$). 如果其中有两项 $\leqslant \frac{1}{2}$, 那么 (25) 已经成立. 设仅有 $\frac{1}{1+y_1} \leqslant \frac{1}{2}$, 即

$$y_1 \geqslant 1, y_2 \leqslant 1, y_3 \leqslant 1, \ldots, y_n \leqslant 1. \tag{27}$$

那么 $\frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2} \leqslant \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+y_2 y_3 \ldots y_n}$

$$= \frac{1}{1+y_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{y_1}}$$

$$= 1.$$

(25) 的左边前两项之和为 1, 其余的 n-2 项均小于 1, 所以 (25) 的左边小于右边.

注 (i) 在动手证 (25) 之前, 先看看左边各项的值大致是多少. 这种粗略的估计往往能将我们引上解题的正确路径, 少绕一些弯路.

(ii) 如果令 $\frac{x_i^2}{x_{i+1}x_{i+2}} = z_i$, 那么 (24) 等价于

$$\sum \frac{1}{1+z_i} \geqslant 1, \tag{28}$$

与上面的解法完全对称. 在 z_i 中至多有一个小于等于 1, 否则 (28) 成立. 设 $z_1 \leqslant 1$, 则由

$$\frac{1}{1+z_2} \geqslant \frac{1}{1+z_2 z_3 \cdots z_n} = \frac{1}{1+\frac{1}{z_1}} = \frac{z_1}{z_1+1}$$

即得 (28).

(iii) 我们又采用了枚举法.

有时候需要将几种方法结合起来解题.

□

例 3.9

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为非负实数,

$$x = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right), \tag{29}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}.$$

求证:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n}\left[(x - x_1)^2 + \cdots + (x - x_n)^2\right] \\ &\leqslant \sqrt{\tfrac{1}{2n}\left[\left(x_1^2 - y^2\right)^2 + \cdots + (x_n^2 - y^2)^2\right]}. \end{aligned} \tag{30}$$

证明. 不妨设 (30) 的左边为 1, 否则用

$$\frac{x_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x - x_i)^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x - x_i)^2}}\text{及}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x - x_i)^2}}\right)$$

代替 x_i(x 及 y) 进行讨论. 这种化简的手段在不等式的两边均为 (同次) 齐次式时常常采用.

我们有 $1 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \frac{2x}{n}\sum x_i + x^2 = y^2 - x^2$

$$= \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \frac{x}{n}\sum x_i. \tag{31}$$

于是经过一些恒等变形与适当缩减有

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2 - y^2\right)^2 = \tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2 - x^2 - 1\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2 - x^2\right)^2 - \tfrac{2}{n}\sum\left(x_i^2 - x^2\right) + 1 \\ &= \tfrac{1}{n}\sum\left(x_i^2 - x^2\right)^2 - 2\left(y^2 - x^2\right) + 1 \\ &= \tfrac{1}{n}\sum(x_i - x)^2\left(x_i^2 + 2x_i x + x^2\right) - 1 \\ &\geqslant \tfrac{1}{n}\sum(x_i - x)^2 x_i^2 + \tfrac{2x}{n}\sum(x_i - x)^2 x_i - 1 \\ &\geqslant \left[\tfrac{1}{n}\sum(x_i - x)x_i\right]^2 + \tfrac{2}{n^2}\left[\sum x_i(x_i - x)\right]^2 - 1(\text{柯西不等式}) \\ &= 1 + 2 - 1 = 2, \end{aligned}$$

从而 (30) 成立.

例 9 显然是从概率论 “下放” 来的 (与数学期望、方差有关的) 不等式.

与柯西不等式逆向的估计也很有用, 这是波利亚于 1925 年建立的, 即下面的 (32).

□

例 3.10

设 $a \leqslant a_i \leqslant A, b \leqslant b_i \leqslant B(i = 1, 2, \cdots, n)$, a, b 均为正数, 则

$$\begin{aligned} &\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \\ &\leqslant (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}} + \sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{32}$$

证明. 我们证明更一般的

$$\sum p_i a_i^2 \cdot \sum p_i b_i^2 \leqslant \left(\sum p_i a_i b_i\right)^2 \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2, \tag{33}$$

其中 “权” $p_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,n)$, 并且 $\sum p_i = 1$.

为了证明 (33), 令 u_i, v_i 满足方程组

$$\begin{cases} a_i^2 = u_i a^2 + v_i A^2, \\ b_i^2 = u_i B^2 + v_i b^2 \end{cases} \tag{34}$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$. (34) 总是有解的, 因为在 $\begin{vmatrix} a^2 & A^2 \\ B^2 & b^2 \end{vmatrix}$ 为 0 即 $a=A, b=B$ 时, 取 $u_i + v_i = 1$ 即可.

由 (34) 及柯西不等式得

$$\begin{aligned} a_i b_i &= \left(u_i a^2 + v_i A^2\right)^{1/2} \left(u_i B^2 + v_i b^2\right)^{1/2} \\ &\geqslant u_i aB + v_i bA. \end{aligned}$$

令 $p = \sum p_i u_i, q = \sum p_i v_i$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\sum p_i a_i^2 \cdot \sum p_i b_i^2}{(\sum p_i a_i b_i)^2} &\leqslant \frac{(pa^2+qA^2)(pB^2+qb^2)}{(paB+qbA)^2} \\ = 1 + pq\left(\frac{AB-ab}{paB+qbA}\right)^2 &\leqslant 1 + pq\left(\frac{AB-ab}{2\sqrt{pqabAB}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

即 (33) 成立.

(33) 有很多推论, 如下面的例 11.

□

例 3.11

设 $0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n, 0 < a_i (i=1,2,\cdots,n)$ 并且 $\sum a_i = 1$. 则有康托罗维奇 (L. V. Kantorovich, 1912—1986) 不等式

$$\sum a_i b_i \cdot \sum \frac{a_i}{b_i} \leqslant \frac{(b_1+b_n)^2}{4b_1 b_n}. \tag{35}$$

证明. a_i 就是 (33) 中的 p_i . 两个数列 $\{\sqrt{b_i}\}, \left\{\sqrt{\frac{1}{b_i}}\right\}$ 的上界分别为 $\sqrt{b_n}(=B)$ 与 $\sqrt{\frac{1}{b_1}}(=A)$, 下界分别为 $\sqrt{b_1}(=b)$ 与 $\sqrt{\frac{1}{b_n}}(=a)$. 所以 (33) 中的 $\left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2$ 现在成为 $\frac{(b_1+b_n)^2}{4b_1b_n}$.

一个较普遍的结果往往能导出许多推论 (如从 (33) 导出 (32),(35)). 将 (35) 再 “特殊化” 可以得出

$$\left(\frac{1}{n}\sum a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum \frac{1}{a_i}\right) \leqslant \frac{(a+A)^2}{4aA} \quad \text{(Schweitzer不等式)}.$$

□

例 3.12

已知在 $|x| \leqslant 1$ 时，$|ax^2+bx+c| \leqslant 1$. 证明：在 $|x| \leqslant 1$ 时，

$$| 2ax+b | \leqslant 4. \tag{36}$$

证明. 记 $f(x)=ax^2+bx+c$，则

$$\begin{cases} f(0)=c, \\ f(1)=a+b+c, \\ f(-1)=a-b+c. \end{cases} \tag{37}$$

由 (37) 可以解出 (即用函数值表示系数)

$$a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)-2f(0)],$$

$$b=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1)).$$

于是，在 $|x| \leqslant 1$ 时，由于 $|f(x)| \leqslant 1$，有

$$\begin{aligned} &| 2ax+b | \\ &= \left|[f(1)+f(-1)-2f(0)]x+\tfrac{1}{2}[f(1)-f(-1)]\right| \\ &= \left|\left(x+\tfrac{1}{2}\right)f(1)+\left(x-\tfrac{1}{2}\right)f(-1)-2xf(0)\right| \\ &\leqslant \left|x+\tfrac{1}{2}\right|+\left|x-\tfrac{1}{2}\right|+2 \\ &\leqslant 4. \end{aligned}$$

(36) 称为马尔可夫不等式. 其实它是化学家门捷列夫 (D. I. Mendeleev, 1834—1907, 化学元素周期律的发现者) 首先发现的, 马尔可夫把它推广到 n 次多项式 $f(x)$, 得

如果 $|x| \leqslant 1$ 时，$|f(x)| \leqslant M$，那么 $|x| \leqslant 1$ 时，导数的绝对值

$$| f'(x) | \leqslant Mn^2.$$

在区间 (a,b) 上定义的函数 $f(x)$，如果对这区间内任意两个数 x_1, x_2，均有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}, \tag{38}$$

那么 $f(x)$ 就称为 (a,b) 上的凸函数.

凸函数的几何意义是连接图像 $y=f(x)$ 上任意两点的弦在连接这两点的曲线的上方 (图 19-1).

text_image

y y = f(x) O x_1 x_2 x

图 19-1

我们熟悉的指数函数 $y=a^x$，二次函数 $y=x^2$ 都是凸函数。

□

例 3.13

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数. 证明对任意的整数 $n \geqslant 2$ 及 (a,b) 中任意 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，均有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}. \tag{39}$$

证明. 首先用归纳法不难证明对任意自然数 k 及 (a,b) 中任意 2^k 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2^k}$ 均有

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k}. \tag{40}$$

要证明 (39) 成立, 只需证明 (39) 对 n 成立时, 对 $n-1$ 也一定成立. 于是, 假定 (39) 对 n 成立, 并设给定的 $n-1$ 个数为 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$. 取 x_n 为这 $n-1$ 个数的算术平均值, 则

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f\left(\tfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \\ &= f\left(\tfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n}\right) \\ &\leqslant \tfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})+f(x_n)}{n}. \end{aligned}$$

去分母, 整理得 $f(x_n) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$,

即 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})}{n-1}$,

因此 (39) 对一切 n 成立.

例 13 中所用的归纳法值得仔细体会.

由 (39) 易知, 对 (a,b) 中任意 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及任意正有理数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ （通常称为权），有

$$f\Big(\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\Big) \leqslant \frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}. \tag{41}$$

如果 $f(x)$ 连续, 那么 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 可取任意正实数.

(41) 通常称为琴生 (Jensen,1859—1925) 不等式.

类似地, 如果在 (a,b) 上,(38) 的不等号反向, 那么 $f(x)$ 就称为凹函数, 对于凹函数,(41) 的不等号反向.

对数函数 $y=\log_a x$,在底 $a>1$ 时,是凹函数;在底 $a<1$ 时,是凸函数。二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ，在 $a>0$ 时，是凸函数；在 $a<0$ 时，是凹函数。反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ ，在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸函数；在区间 $(-\infty,0)$ 上是凹函数。一般地，如果在区间 I 上，二阶导数 $f''(x)>0(<0)$ ，那么 $f(x)$ 在 I 上是凸（凹）函数。

凸函数与琴生不等式是证明不等式的有力工具, 但证明的套路比较固定, 所以竞赛中并不常见. 因此本书不多涉及.

□

3.1 习题 3

练习 3.1. 已知 a,b,c,d,m,n 都是正数，并且 $a+c=b+d=m+n=1, p=nc+md, q=mb+na$. 证明:

(a) $cd+ab>bd$;

(b) $c^2+a^2+ac>bc+ad$;

(c) $\frac{1}{m^2+mn+n^2}>\frac{pq}{(mp+na)(mq+nc)}$.

练习 3.2. 二次三项式 ax^2+bx+c 在 $[0,1]$ 上所有值的模均不超过 1. 则 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值是多少?

练习 3.3. $a>0,b,c$ 为实数，并且 $\left|ax^2+bx+c\right|$ 在 $[0,1]$ 上不大于 1. 试对下列各种情况分别求出 $a+|b|+|c|$ 的最大值:

(a) $b^2\leqslant 4ac$.

(b) $b^2>4ac,-\frac{b}{2a}\geqslant 1$.

(c) $b^2>4ac,b>0$.

(d) $b^2>4ac,0\leqslant\frac{-b}{2a}<1,c>0$.

(e) $b^2>4ac,0\leqslant\frac{-b}{2a}<1,c\leqslant 0$.

练习 3.4. n 为自然数, a 为实数, a 到 $0,1,\ldots,n$ 这 $n+1$ 个数的最小距离 $\min_{0\leqslant k\leqslant n}|a-k|$ 记为 $\langle a\rangle$, 求证: $|a|\cdot|a-1|\cdot\cdots\cdot|a-n|\geqslant\langle a\rangle\cdot\frac{n!}{2^n}$.

练习 3.5. 设 x,y,z 均非负，并且 $x+y+z=1$. 求证: $0\leqslant yz+zx+xy-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

练习 3.6. 圆 C_i 与圆 $C_{i+1}(i=1,2,\cdots,6;C_7=C_1)$ 外切，并且均与圆 C 外切。C 的半径为 R, C_i 的半径为 r_i 。证明：$R\leqslant\frac{1}{6}\sum r_i$ ，并且 $\frac{1}{R}\leqslant\frac{1}{6}\sum\frac{1}{r_i}$ 。

练习 3.7. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为正实数，和为 1. 证明:

$$\frac{x_1^2}{x_1+x_2}+\frac{x_2^2}{x_2+x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n^2}{x_n+x_1}\geqslant\frac{1}{2}.$$

练习 3.8. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为正实数，$B_i=x_i+x_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n,x_{n+1}=x_1)$, $Q=Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\frac{x_i}{B_i}$. 证明：$1<Q<n-1$，并且 $1,n-1$ 均为最佳.

练习 3.9. $0\leqslant a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n,\sum_{i=1}^n a_ia_{i+1}=1(a_{n+1}=a_1)$, 求 $\sum a_i$ 的最小值.

练习 3.10. a,b,c,x,y,z 都是正实数，求证:

$$\frac{a}{2a+b+c}yz+\frac{b}{a+2b+c}zx+\frac{c}{a+b+2c}xy\leqslant\frac{x^2+y^2+z^2}{4}.$$

练习 3.11. x,y,z 为正实数，求证：$\sum\frac{yz}{x(y+z)^2}\geqslant\frac{9}{4(x+y+z)}$.

练习 3.12. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为正数, A,G 分别为它们的算术平均与几何平均, $H=\frac{n}{a_1^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$ 称为它们的调和平均. 证明:

$$\frac{A}{H}\leqslant-\frac{n-2}{n}+\left(\frac{A}{G}\right)^n\cdot\frac{2(n-1)}{n}.$$

练习 3.13. 设 x_i 为正实数 $(i = 0, 1, \cdots, n)$，求证：

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{x_i}{x_{i+1}} \right)^n \geqslant \max \left\{ \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}}, \sum_{i=0}^{n} \frac{x_{i+1}}{x_i} \right\},$$

其中 $x_{n+1} = x_0$

第 4 讲 归纳法与不等式

数学归纳法不仅可以用来证明等式, 也可以用来证明不等式. 与自然数 n 有关的不等式, 尤应想到采用数学归纳法的可能.

例 4.1

设

$$a_n = 4 - \cfrac{1}{\underbrace{4 - \cfrac{1}{4 - \cfrac{1}{\ddots 4 - \frac{1}{4}}}}_{\text{共}n\text{个}4}} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明. : (a) $a_n > 3$. (b) a_n 严格递减, 即 $a_{n+1} < a_n (n = 1, 2, \cdots)$.

□

证明. 显然 $a_1 = 4 > 3, a_2 = 4 - \frac{1}{4} > 3$, 并且 $a_2 < a_1$.

假设 $a_n > 3, a_n > a_{n+1}$, 那么 $a_{n+1} = 4 - \frac{1}{a_n} > 4 - \frac{1}{3} > 3$,

$$a_{n+2} = 4 - \frac{1}{a_{n+1}} < 4 - \frac{1}{a_n} = a_{n+1}.$$

因此, 对一切自然数 n , (a), (b) 均成立.

注 a_n 的极限为 $2 + \sqrt{3}$.

□

例 4.2

$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$, 求证:

$$\sqrt{2} < a_n < \sqrt{2} + \frac{1}{n}. \tag{1}$$

证明. 由 A-G 不等式, 得 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} > 2\sqrt{\frac{a_n}{2} \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{2}$.

又设 (1) 式右边不等式成立, 则

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} < \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{n}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{1}{2n} \leqslant \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}.$$

所以 (1) 式对一切自然数 n 成立.

□

例 4.3

（a）设正数 a_1, a_2, a_3 满足

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2 > 2(a_1^4+a_2^4+a_3^4), \tag{2}$$

求证: a_1, a_2, a_3 一定是某个三角形的三条边长.

(b) 设正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)^2 > (n-1)\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4\right), \tag{3}$$

其中 $n \geqslant 3$. 求证: 这 n 个数中的任意三个均可作为某个三角形的边长.

证明. (a) 由于 (参见第 1 讲例 4 的海伦-秦九韶公式)

$$\begin{aligned} &0 < \left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^2 - 2\left(a_1^4+a_2^4+a_3^4\right) \\ &= (a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2-a_3)(a_2+a_3-a_1)(a_3+a_1-a_2), \end{aligned}$$

所以 a_1, a_2, a_3 中最大的小于其他两个的和，这三个数可以作为一个三角形的边长.

(b) 假设由 (3) 可以推出 (2). 考虑满足

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2\right)^2 > n\left(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_{n+1}^4\right) \tag{4}$$

的正数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$ ，我们要证明 (3) 成立.

记 $A = a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2, B = a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4$, (4) 就是

$$\left(A+a_{n+1}^2\right)^2 > n\left(B+a_{n+1}^4\right). \tag{5}$$

又 $nB+na_{n+1}^4 = (n-1)B+a_{n+1}^4+B+(n-1)a_{n+1}^4$

$$\begin{aligned} &\geqslant (n-1)B+a_{n+1}^4+2\sqrt{(n-1)B}a_{n+1}^2 \\ &= \left[\sqrt{(n-1)B}+a_{n+1}^2\right]^2. \end{aligned} \tag{6}$$

由 (5)，(6) 得 $A+a_{n+1}^2 \geqslant \sqrt{(n-1)B}+a_{n+1}^2$

因此 (3) 成立. 由归纳假设,(2) 也成立.

□

例 4.4

设 $a>0$，则

$$\sqrt{a+\sqrt{2a+\sqrt{3a+\cdots+\sqrt{na}}}} < \sqrt{a}+1. \tag{7}$$

证明. 我们用归纳法证明当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时,

$$\sqrt{ka+\sqrt{(k+1)a+\cdots+\sqrt{na}}}<1+\sqrt{ka}. \tag{8}$$

当 $k=n$ 时, (8) 显然成立. 假设

$$\sqrt{(k+1)a+\sqrt{(k+2)a+\cdots+\sqrt{na}}}<1+\sqrt{(k+1)a},$$

则 $\sqrt{ka+\sqrt{(k+1)a+\cdots+\sqrt{na}}}<\sqrt{ka+1+\sqrt{(k+1)a}}$

$$<\sqrt{ka+1+2\sqrt{ka}}=1+\sqrt{ka}.$$

因此, 对一切满足 $1 \leqslant k \leqslant n$ 的自然数 k,(8) 式成立. 特别地, 在 $k=1$ 时得到 (7).

注这是归纳法的一种变形, 从某个 n 起倒推至 1.

□

例 4.5

已知 $a_0=\frac{1}{2}, a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(1 \leqslant k \leqslant n)$, 证明

$$1-\frac{1}{n}<a_n<1. \tag{9}$$

证明. 与数列有关的不等式, 常用数学归纳法证明, 上面已经举了几个例子. 现在的 (9) 则相当难证. 困难在于对 k 进行归纳时 (n 是定值), 没有现成的关于 a_k 的不等式可以作为归纳假设 (用 $1-\frac{1}{k}<a_k<1$ 是无法得出 $1-\frac{1}{k+1}<a_{k+1}<1$ 的), 需要我们自己去摸索.

先考虑上界, 由于 $a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}=\frac{2n+1}{4n}$,

$$a_2=\frac{a_1}{n}(n+a_1),$$

我们希望 a_1 的上界以 n 为因数 $\left(\text{从而}\frac{a_1}{n}\right)$ 的 "分母" n 可以约去). 直接将 $a_1=\frac{2n+1}{4n}$ 代入实在太复杂了, 以后的迭代无法进行. 与 $\frac{2n+1}{4n}$ 相近的、分子为 n 的上界以 $\frac{n}{2n-1}$ 为好, 简单、自然. 这时 $a_2<\frac{1}{2n-1}\left(n+\frac{n}{2n-1}\right)=\frac{2n^2}{(2n-1)^2}<\frac{n}{2n-2}$. 最后一步仍是为了简单: 分子、分母均为 n 的一次式, 分子与 a_1 的上界 $\frac{n}{2n-1}$ 的分子保持一致.

由 $a_1<\frac{n}{2n-1}, a_2<\frac{n}{2n-2}$, 我们猜测

$$a_k<\frac{n}{2n-k}. \tag{10}$$

将 (10) 作为归纳假设, 则 $a_{k+1}=\frac{a_k}{n}(n+a_k)<\frac{1}{2n-k}\left(n+\frac{n}{2n-k}\right)$

$$=\frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2}<\frac{n}{2n-k-1}.$$

于是 (10) 对于 $1 \leqslant k \leqslant n$ 均成立. 特别地, 在 $k=n$ 时, $a_n<\frac{n}{2n-n}=1$.

再考虑下界. 一个理想的候选者是 $\frac{n-1}{2n-k}$, 它在 $n=k$ 时恰好为 $1-\frac{1}{n}$. 然而

经过尝试, 不能顺利通过归纳这一关. 如果从失败中总结经验, 就会想到 n-1 必须换为比 n 大的 $n+1$, 从而分母 2n-k 应相应地换为 $2n-k+2$ (不能用 $2n-k+1$, 因为 $\frac{n+1}{2n-k+1}$ 大于上界 $\frac{n}{2n-k}$). 即猜测

$$a_k > \frac{n+1}{2n-k+2}. \tag{11}$$

假设 (11) 成立, 则

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + \tfrac{1}{n}a_k^2 > \tfrac{n+1}{2n-k+2} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{n+1}{2n-k+2}\right)^2 \\ &= \tfrac{n+1}{2n-k+1} - \tfrac{n+1}{(2n-k+1)(2n-k+2)} + \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{n+1}{2n-k+2}\right)^2 \\ &= \tfrac{n+1}{2n-k+1} + \tfrac{n+1}{(2n-k+2)^2}\cdot\left(\tfrac{n+1}{n} - \tfrac{2n-k+2}{2n-k+1}\right) \\ &> \tfrac{n+1}{2n-k+1}. \end{aligned}$$

于是 (11) 对一切 $1 \leqslant k \leqslant n$ 均成立. 特别地, 在 k = n 时,

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n}.$$

□

注. (i) (9) 中下界可改为更精确的 $1-\frac{1}{n+2}$, 但难度反而降低了（它暗示我们采用 (11)).
(ii) 上面的证明是中国科学技术大学白志东先生给出的.

例 4.6

设 x 为正数, $[x]$ 表示 x 的整数部分. 证明:

$$[x] + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[nx]}{n} \leqslant [nx]. \tag{12}$$

证明. 这是一道美国数学奥林匹克的试题, 原来的解答极为复杂, 上海的赵斌先生给出了一个非常漂亮的证明. 他采用了数学归纳法, 令

$$a_k = [x] + \frac{[2x]}{2} + \cdots + \frac{[kx]}{k}. \tag{13}$$

假设结论在 n<k 时成立, 即 $a_1 \leqslant [x]$,

$$a_2 \leqslant [2x],$$

••••••

$$a_{k-1} \leqslant [(k-1)x].$$

相加得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} \leqslant [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x]$. (14)

由定义 (13)，得 $k(a_k - a_{k-1}) = [kx]$,

$$(k-1)\,(a_{k-1} - a_{k-2}) = [(k-1)x],$$

• • • • • •

$$1 \cdot a_1 = [x].$$

相加得 $ka_k - a_{k-1} - \cdots - a_1 = [kx] + [(k-1)x] + \cdots + [x]$. (15)

由 (14)，(15) 得

$$ka_k \leqslant [kx] + [(k-1)x] + \cdots + [x] + [x] + [2x] + \cdots + [(k-1)x],$$

因为 $[ix] + [(k-i)x] = [[ix] + (k-i)x] \leqslant [ix + (k-i)x] = [kx]$ ，所以

$$ka_k \leqslant [kx] + [kx] + \cdots + [kx] = k[kx],$$

即 $a_k \leqslant [kx]$.

从而 (12) 成立.

□

例 4.7

已知数列 $\{r_n\}$ 满足 $r_1 = 2, r_n = r_1 r_2 \cdots r_{n-1} + 1 (n = 2, 3, \cdots)$ ，自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1, \tag{16}$$

求证：$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}$. (17)

证明. 由 $\{r_n\}$ 的定义, 容易看出 (或用归纳法证明)

$$1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \cdots - \frac{1}{r_n} = \frac{1}{r_1 r_2 \cdots r_n}. \tag{18}$$

当 $\frac{1}{a_1} < 1$ 时, 自然数 $a_1 \geqslant 2 = r_1$, 所以 $\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{r_1}$. 假设在 $n < k$ 时,(17) 对一切满足 (16) 的自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 成立. 如果在 n=k 时, 有一组满足 (16) 的自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 使得

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} > \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n}, \tag{19}$$

那么 (不妨设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$) 由归纳假设

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{r_1},$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$

• • • • • •

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} \leqslant \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_{n-1}}.$$

将以上各式分别乘以非正数 $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \cdots, a_{n-1} - a_n$; 将 (19) 乘以 a_n , 然后相加得 $n > \frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \cdots + \frac{a_n}{r_n}$. 于是, 由 A-G 不等式得

$$1 > \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{r_1} + \frac{a_2}{r_2} + \cdots + \frac{a_n}{r_n}\right) \geqslant \sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{r_1 r_2 \cdots r_n}},$$

即 $r_1 r_2 \cdots r_n \geqslant a_1 a_2 \cdots a_n$. (20)

另一方面，正数 $1 - \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

所以由 (18)，(19) 得 $\frac{1}{r_1r_2\cdots r_n} \geqslant \frac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ ，

即 $r_1r_2\ldots r_n \leqslant a_1a_2\ldots a_n$,

与 (20) 矛盾.

因此，(19) 不成立. 从而对一切自然数 n 及满足 (16) 的自然数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ，(17) 成立.

注可进一步推出 (17) 的等号当且仅当 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 时成立.

例 7 原是厄迪斯的一个猜想. 上面的解法是宁波大学陈计先生给出的, 在归纳法中使用反证法 (相当于增添条件 (19)), 极具巧思, 值得仔细玩味.

□

例 4.8

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为两两不等的自然数，并且所有的差 $|a_i - a_j|\,(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 互不相等. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{1}{6}n(n^2+5). \tag{21}$$

证明. 显然 $a_1 \geqslant 1$. 假设 (21) 对 n 成立. 考虑 $n+1$ 个符合题设条件的自然数

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}.$$

每一对 a_i, a_j 有一个差，共 C_{n+1}^2 个差. 这些差 $|a_i - a_j| \leqslant a_{n+1} - a_1$. 因此,

$$a_{n+1} \geqslant a_1 + \mathrm{C}_{n+1}^2 \tag{22}$$

(否则由抽屉原理, 有两个差相等).

由 (21)，(22) 得 $\sum_{i=1}^{n+1} a_{i+1} \geqslant 1 + C_{n+1}^2 + \frac{1}{6}n(n^2+5)$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[(n+1)^2+5].$$

从而 (21) 对一切自然数 n 成立.

注若题中 a_i 均限制为奇数，则 $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant \frac{1}{3}n(n^2+2)$.

□

例 4.9

求 c 的最小值, 使得

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leqslant c\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \tag{23}$$

对一切满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_i \leqslant x_{i+1} (i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 的正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 均成立.

证明. 重要的是定出 c 的值.

取 $x_k = 2^k, k = 1, 2, \cdots, n$ ，则

$$\frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}} = \frac{(\sqrt{2})^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^{n+1} - 1}}.$$

当 $n \to +\infty$ 时，上式 $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$. 因此 $c \geqslant \sqrt{2}+1$.

在 $c = \sqrt{2}+1$ 时，显然 $\sqrt{x_1} < c\sqrt{x_1}$. 设对于 n ，(23) 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}+\sqrt{x_{n+1}}\\
&\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}+\sqrt{x_{n+1}}\\
&= c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}+c(\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}-\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}})\\
&+\sqrt{x_{n+1}}\\
&= c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}+\sqrt{x_{n+1}}-c\cdot\frac{x_{n+1}}{\sqrt{x_1+\cdots+x_{n+1}}+\sqrt{x_1+\cdots+x_n}}\\
&\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}+\sqrt{x_{n+1}}-c\cdot\frac{x_{n+1}}{(\sqrt{2}+1)\sqrt{x_{n+1}}}\\
&\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_{n+1}}.
\end{aligned}$$

因此, $\sqrt{2}+1$ 就是所求的最小值.

□

例 4.10

证明: 对一切自然数 n,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2. \tag{24}$$

证明. 直接用归纳法不能奏效. 但更强的结论

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n} \tag{25}$$

却不难用归纳法推出 (请读者自己补出证明), 从而 (24) 也随之成立.

先将结论加强, 再用归纳法, 反而好证. 这是因为结论加强了, 归纳假设 (我们可以利用的条件) 也加强了.

□

例 4.11

$b_1 = 100, b_{n+1} = 100^{b_n} (n = 1, 2, \cdots)$. $a_1 = 3, a_{n+1} = 3^{a_n} (n = 1, 2, \cdots)$. 求满足 $b_m > a_{100}$ 的最小正整数 m.

证明. 显然 $100 > 3^3$ ，所以 $b_n > a_{n+1}$ 。另一方面，我们可以证明

$$a_{n+2} > b_n. \tag{26}$$

从而所求的 $m = 99$.

但 (26) 不能直接用归纳法证明, 需要先加强为

$$a_{n+2} > 5b_n. \tag{27}$$

在 (27) 成立时,

$$\begin{aligned}
a_{n+3} &= 3^{a_{n+2}} > 3^{5b_n} = 243^{b_n} > 2^{b_n}\cdot 100^{b_n}\\
&= 2^{b_n}\cdot b_{n+1} > 5b_{n+1}.
\end{aligned}$$

所以 (27) 对一切 n 成立.

□

例 4.12

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$. $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是这三角形中任意给定的点. 证明可以将这 n 个点重新编号, 使得

$$P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 \leqslant AB^2. \tag{28}$$

证明. 将 (28) 加强为

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + P_2P_3^2 + \cdots + P_{n-1}P_n^2 + P_nB^2 \leqslant AB^2. \tag{29}$$

$n = 0$ 时, (29) 显然成立. 设在 $n < k$ 时, (29) 成立. 考虑 k 个点

作斜边上的高 CD . 如果 k 个点不全在 $\triangle ACD$ 中, 也不全在 $\triangle BCD$ 中, 那么由归纳假设可以将它们编上号, 使得

$$AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{h-1}P_h^2 + P_hC^2 \leqslant AC^2, \tag{30}$$

$$CP_{h+1}^2 + P_{h+1}P_{h+2}^2 + \cdots + P_{k-1}P_k^2 + P_kB^2 \leqslant BC^2. \tag{31}$$

这里 $P_1, P_2, \cdots, P_h$ 在 $\triangle ACD$ 中, $P_{h+1}, P_{h+2}, \cdots, P_k$ 在 $\triangle BCD$ 中.

由于 $\angle P_hCP_{h+1} < \angle ACB = 90^\circ$, 所以

$$P_hC^2 + CP_{h+1}^2 > P_hP_{h+1}^2. \tag{32}$$

将 (30), (31) 相加并利用 (32) 得

$$\begin{aligned} &AP_1^2 + P_1P_2^2 + \cdots + P_{h-1}P_h^2 + P_hP_{h+1}^2 + P_{h+1}P_{h+2}^2 + \cdots + P_{k-1}P_k^2 + P_kB^2 \\ &\leqslant AC^2 + BC^2 = AB^2. \end{aligned}$$

即 (29) 对 n=k 仍然成立.

如果 k 个点全在 $\triangle ACD$ 或 $\triangle BCD$ 中, 作斜边上的高将这个三角形分为两个直角三角形, 如此继续下去, 终会化为前面所说的情况, 细节请读者自己补出.

最后, 我们介绍一个不等式, 虽然不全用归纳法来证明, 但反复进行迭代, 亦颇有趣.

□

例 4.13

设 $x_1, x_2, \cdots$ 为正实数, 并且

$$x_n^n = \sum_{j=0}^{n-1} x_n^j, n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{33}$$

证明. 对所有 n

$$2 - \frac{1}{2^{n-1}} < x_n < 2 - \frac{1}{2^n}. \tag{34}$$

□

证明. $n=1$ 时, $x_n=1$, 结论显然. 以下设 $n>1$, 并将 x_n 改写为 x.

显然 $x\neq 1$. (33) 即 $x^n=\frac{x^n-1}{x-1}$, 从而

$$x^{n+1}-2x^n+1=0. \tag{35}$$

由 (35) 得 $x^n(2-x)=1$ ， 可见 $x<2$, 从而

$$1=x^n(2-x)<2^n(2-x),$$

$$x<2-\frac{1}{2^n}.$$

这样, 由一个平凡的上界 2, 经过一次迭代产生更好的上界 $2-\frac{1}{2^n}$.

下界可用同样的手法. 首先 $x<1$ 时, $x^n(2-x)<x(2-x)<1$. 所以 $x>1$. 但用 $x=1$ 这个下界迭代并不能产生新的下界.

我们指出 $2-\frac{2}{n+1}$ 是下界. 若 $x<2-\frac{2}{n+1}$, 则 $\frac{x}{n}<2-x$, 从而 $\frac{x}{n}(2-x)>\frac{1}{n}\left(2-x+\frac{x-1}{n}\right)$ (两个正数的和为定值, 小的越小, 两数的积越小), 即 $x(2-x)>2-x+\frac{x-1}{n}$. 反复用这一手法, 得

$$x^n(2-x)>x^{n-1}\left(2-x+\frac{x-1}{n}\right)>\cdots>2-x+\frac{x-1}{n}\cdot n=1.$$

与 (35) 矛盾. 所以 $x\geqslant 2-\frac{2}{n+1}$. 从而 $1=x^n(2-x)\geqslant\left(2-\frac{2}{n+1}\right)^n(2-x)$, 即

$$\frac{1}{2^n}\geqslant\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n(2-x). \tag{36}$$

用归纳法易知 x > -1 时,

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx, \tag{37}$$

这称为贝努里 (Bernoulli) 不等式 (更一般的形式见下节例 2).

用贝努里不等式 (或上面所用的方法), 由 (36) 得 $n\geqslant 4$ 时,

$$\frac{1}{2^n}\geqslant\left(1-\frac{n}{n+1}\right)(2-x)>\frac{1}{4}(2-x),$$

从而 $x\geqslant 2-\frac{1}{2^{n-2}}$.

$2-\frac{1}{2^{n-2}}$ 还不是所希望的下界. 再迭代一次

$$1=x^n(2-x)\geqslant\left(2-\frac{1}{2^{n-2}}\right)^n(2-x),$$

即 $\frac{1}{2^n}\geqslant\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^n(2-x)$,

再用贝努里不等式 $\frac{1}{2^n}\geqslant\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right)(2-x)$

$$\begin{aligned}&\geqslant\left[1-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{n}{1+(n-2)+1}\right](2-x)\\&=\tfrac{1}{2}(2-x).\end{aligned}$$

从而 $x\geqslant 2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

这正是所希望的下界.

剩下 $n=2,3$ 的情况.

$n=3$ 时，$x^4-2x^3+1=(x-1)(x^3-x^2-x-1)$ 若 $x\leqslant\frac{7}{4}=2-\frac{1}{2^2}$ ，则

$$\begin{aligned}&x^3-x^2-x-1\leqslant\left(\tfrac{7}{4}-1\right)x^2-x-1\leqslant\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{7}{4}-1\right)x-1\\&\leqslant\tfrac{9}{16}\times\tfrac{7}{4}-1<0.\end{aligned}$$

因此必有 $x>2-\frac{1}{2^2}$

$n=2$ 时，$x^3-2x^2+1=(x-1)(x^2-x-1)=0, x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}>2-\frac{1}{2}$.

□

注. (i) 本题如用微分学知识, 易知 $x^{n+1}-2x^n+1$ 在 $x=\frac{2n}{n+1}$ 处取得唯一的最小值, 在区间 $\left[\frac{2n}{n+1},+\infty\right)$ 上递增，在区间 $\left(0,\frac{2n}{n+1}\right)$ 上递减. 在 $x=1$ 时，$x^{n+1}-2x^n+1=0, 2-\frac{1}{2^{n-1}}>\frac{2n}{n+1}$ ，从而只需证明 $1<\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n$ ，而这可由贝努里不等式立即得到

$$2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n>2\left(1-\frac{n}{2^n}\right)\geqslant 2\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{1+(n-1)}\right]=1.$$

困难在于不用微分学知识.

(ii) 对于 $y>x\geqslant 2-\frac{2}{n+1}$ ，我们有 $\frac{y}{n}>\frac{x}{n}\geqslant 2-x$ ，所以

$$\begin{aligned}&\tfrac{x}{n}(2-x)>\tfrac{y}{n}\left(2-x-\tfrac{y-x}{n}\right),\\&x^n(2-x)>x^{n-1}y\left(2-x-\tfrac{y-x}{n}\right)>\ldots\\&>y^n\left(2-x-\tfrac{y-x}{n}\cdot n\right)\\&=y^n(2-y).\end{aligned}$$

因此，在 $x<2-\frac{1}{2^{n-1}}$ 时，

$$x^n(2-x)>\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n>1.$$

从而应当有 $x\geqslant 2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

采用这一证法可以省去一些步骤. 但上面的证法, 虽然较繁, 却可以显示迭代的作用, 并且得到几个较弱的不等式.

4.1 习题 4

练习 4.1. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $0\leqslant a_i\leqslant a_{i+1}\leqslant 2a_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$. 证明总可以适当选择正负号，使 $S=\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n$ 满足 $0\leqslant S\leqslant a_1$.

练习 4.2. 设 $a_1=3, a_n=a_{n-1}^2-n\ (n=2,3,\cdots)$. 求证: $a_n>0$.

练习 4.3. 设 $a_0,a_1,\cdots,a_k$ 为任意正实数，求证:

$$\frac{a_1}{(a_0+a_1)^{n+1}}+\frac{a_2}{(a_0+a_1+a_2)^{n+1}}+\ldots$$

$$+\frac{a_k}{(a_0+a_1+\cdots+a_k)^{n+1}}<\frac{1}{a_0^n}(n\in\mathbf{N}).$$

练习 4.4. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数，$b_k = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}(1 \leqslant k \leqslant n)$，$C_n = (a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2$，$D_n = (a_1-b_n)^2+(a_2-b_n)^2+\cdots+(a_n-b_n)^2$。求证：$C_n \leqslant D_n \leqslant 2C_n$。

练习 4.5. 设数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n+1}$ 满足 $a_i - 2a_{i+1} + a_{i+2} \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, 2n-1)$，求证：

$$\frac{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}}{n+1} \geqslant \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{n}.$$

练习 4.6. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} \cdot a_n = n+1 (n = 1, 2, \cdots)$，求证：

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \geqslant 2(\sqrt{n+1} - 1).$$

练习 4.7. 设 $0 < a_k < 1, k = 1, 2, \cdots, n$. 求证：$\sum_{k=1}^{n} a_k - \prod_{k=1}^{n} a_k < n-1 (n \geqslant 2)$.

练习 4.8. 设 $0 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \leqslant a_k \leqslant 1 (k = 1, 2, \cdots, n)$，求证：

$$\prod a_k + \prod (1 - a_k) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

练习 4.9. 证明樊畴不等式：

(a) 设 $0 < a_k \leqslant \frac{1}{2} (k = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\frac{\prod a_k}{(\sum a_k)^n} \leqslant \frac{\prod (1-a_k)}{[\sum (1-a_k)]^n}$.

(b) 设 $\frac{1}{2} \leqslant a_k < 1 (k = 1, 2, \cdots, n)$，则 $\frac{\prod a_k}{(\sum a_k)^n} \geqslant \frac{\prod (a_k-1)}{[\sum (a_k-1)]^n}$.

练习 4.10. 不用归纳法, 证明例 5 中的不等式成立.

练习 4.11. 设 n 为不小于 3 的整数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为实数, 对 $1 \leqslant i \leqslant n, x_i < x_{i+1}$, 证明:

$$\frac{n(n-1)}{2} \sum_{i<j} x_i x_j > \left[\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) x_i\right] \left[\sum_{j=2}^{n} (j-1) x_j\right].$$

练习 4.12. 证明: 对任意正整数 n 与每一个实数 $t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$，存在实数 $a, b \in (1999, 2000)$，使得 $\frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n < [ta + (1-t)b]^n$.

第 5 讲 导数与不等式

导数是研究函数的重要工具. 在证明不等式时也极为有用. 本章拟对此作一些介绍.

设函数 $y=f(x)$ 在某个区间 I 上可导. 如果在 I 上, 恒有 $f'(x)>0$, 那么 $f(x)$ 严格递增; 如果恒有 $f'(x)<0$, 那么 $f(x)$ 严格递减.

上面的 “$>$” 或 “$<$” 也可以改为 “$\geqslant$” 或 “$\leqslant$”, 只要等号成立的值不形成一个区间.

例 5.1

求 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}(x\in(0,\pi))$ 的最小值.

证明. 函数 $f(t)=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}(t\in(0,1])$ 的导数

$$f'(t)=\frac{1}{2}-\frac{2}{t^2}=\frac{t^2-4}{2t^2}<0,$$

所以 $f(t)$ 严格递减. $f(t)$ 的最小值为 $f(1)=\frac{5}{2}$.

从而 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$, 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 时取得.

本题改用 $t(=\sin x)$ 为自变量, 函数及导函数的表达式均比较简单.

注意不可由 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}\geqslant 2\sqrt{\frac{\sin x}{2}\cdot\frac{2}{\sin x}}=2$,贸然认定最小值为 2. 如不用导数,可由 $\left(\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}\right)^2=4+\left(\frac{2}{\sin x}-\frac{\sin x}{2}\right)^2\geqslant 4+\left(\frac{2}{1}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$ 得出结果.

□

例 5.2

证明: 在 $x>-1$ 时, 对于 $0<\alpha<1$, 有

$$(1+x)^\alpha\leqslant 1+\alpha x, \tag{1}$$

而在 $\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ 时, (1) 中不等号反向（贝努里不等式）.

证明. 令 $f(x)=(1+x)^\alpha-1-\alpha x$, 则

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha, \tag{2}$$

$$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}. \tag{3}$$

对于 $0<\alpha<1, f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 递减。因为 $f'(0)=0$，所以在 $x>0$ 时，$f'(x)<0, f(x)$ 递减。$f(x)\leqslant f(0)=0$。在 $x<0$ 时，$f'(x)>0, f(x)$ 递增，$f(x)\leqslant f(0)=0$。即 (1) 成立（$f(0)$ 是 $f(x)$ 的最大值)。

同样, 可得 $\alpha<0$ 与 $\alpha>1$ 时,(1) 中不等号反向.

$$\alpha=0 \text{ 与} \alpha=1 \text{ 时, } f(x)=0.$$

利用导数可以处理一般的实数指数的问题. 不用导数, 往往只能处理整数指数或有理数指数的情况. 例如贝努里不等式, 用归纳法只能处理 α 为正整数 n 的情况 (参见第 4 讲 (37) 式).

多个变量的函数, 有时可对各个变量逐一处理.

□

例 5.3

已知 $x, y, z \in R^+$. 求证:

$$\frac{xyz}{(1+5x)(4x+3y)(5y+6z)(z+18)} \leqslant \frac{1}{5120}. \tag{4}$$

证明. 对函数 $f(t)=\frac{t}{(at+b)(ct+d)}, t\in \mathbf{R}^+, a,b,c,d>0$ 求导，得

$$f'(t)=\frac{(at+b)(ct+d)-t(2act+bc+ad)}{(at+b)^2(ct+d)^2}=\frac{bd-act^2}{(at+b)^2(ct+d)^2}.$$

当 $t=\sqrt{\frac{bd}{ac}}$ 时，$f(t)$ 取得最大值 $\frac{1}{(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})^2}$.

固定 y，对 x 的函数 $g(x)=\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)}$ 用上面的结果 $(a=5,b=1,c=4,d=3y)$，得

$$\frac{x}{(1+5x)(4x+3y)} \leqslant \frac{1}{(\sqrt{15y}+2)^2}. \tag{5}$$

同样, 对 z 的函数有

$$\frac{z}{(5y+6z)(z+18)} \leqslant \frac{1}{(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}. \tag{6}$$

由 (5)，(6) 并对 $\sqrt{y}$ 的函数再一次用上面的结果得

(4) 式左边 $\leqslant \frac{y}{(\sqrt{15y}+2)^2(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})^2}$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\sqrt{y}}{(\sqrt{15y}+2)(\sqrt{5y}+6\sqrt{3})}\right]^2 \\
&\leqslant \left[\frac{1}{(\sqrt{18\sqrt{5}}+\sqrt{2\sqrt{5}})^2}\right]^2 \\
&= \frac{1}{5120}.
\end{aligned}$$

□

例 5.4

已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$a_1=\frac{21}{16}, \tag{7}$$

$$2a_n-3a_{n-1}=\frac{3}{2^{n+1}}, n\geqslant 2. \tag{8}$$

设 m 为正整数, $m\geqslant 2$. 证明: 当 $n\leqslant m$ 时,

$$\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m-n+1}. \tag{9}$$

(2005 年中国数学奥林匹克试题, 朱华伟提供)

证明. 本题当然是先求出 $\{a_n\}$ 的通项. 由 (8) 得

$$2\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)=3\left(a_{n-1}+\frac{3}{2^{n+2}}\right),$$

从而 $a_n+\frac{3}{2^{n+3}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(a_1+\frac{3}{16}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

于是 (9) 化为 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m-n+1}$. (10)

在 $n\geqslant 2$ 时, (10) 可加强为

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\cdot m\leqslant\frac{m^2-1}{m-n+1}. \tag{11}$$

(11) 的证明如下:

设 $f(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}(m-n+1)$. 在 $n<m$ 时, $\frac{f(n)}{f(n+1)}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{m-n+1}{m-n}$.

因为 $\left(1+\frac{1}{m-n}\right)^m>\left(1+\frac{1}{m}\right)^m>1+m\cdot\frac{1}{m}=2>\frac{3}{2}$,

所以 $f(n)>f(n+1)$

由于 $f(n)$ 递减, 要证 (11), 只需证 $f(2)<\frac{m^2-1}{m}$, 即

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{m}}\leqslant\frac{m+1}{m}. \tag{12}$$

因为 $\left(\frac{m+1}{m}\right)^m\geqslant 1+m\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{2}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geqslant\frac{9}{4}$, 所以 (12) 成立, (11) 也随之成立.

当 $m=n\geqslant 2$ 时, 易证 (11) 成立.

容易看出, 当且仅当 $m=n=2$ 时,(11) 中等号成立.

于是, 剩下的问题是证明 $n=1$ 时, 式 (10) 成立, 即

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{m-1}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m}. \tag{13}$$

为了证明 (13), 考虑关于 t 的二次函数 $y=mt-\frac{2}{3}t^2$

这个函数在 $t\leqslant\frac{3}{4}m$ 时递增, 而

$$\left(1+\frac{1}{2m}\right)^m>1+m\cdot\frac{1}{2m}=\frac{3}{2},$$

得 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}} < 1+\frac{1}{2m}$,

$$1+\frac{1}{2m} < 1+\frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}m,$$

所以 $m\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}} - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{m}}$

$$< m\left(1+\frac{1}{2m}\right) - \frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^2$$

$$< m+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3m}$$

$$= m-\frac{1}{m}+\frac{1}{3m}-\frac{1}{6} \leqslant \frac{m^2-1}{m}.$$

因此 (13) 成立.

在上面的证明中, n 为正整数, 这与原来的题意相符。其实, 不等式 (10) 对一切满足 $1 \leqslant n \leqslant m$ 的实数 n 均成立（m 为大于或等于 2 的实数)。上面的解答需要略加修改。

关于 $f(n)$ 的单调性, 应当利用导数

$$\begin{aligned} &f'(n) = -\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} + (m-n+1)\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot \tfrac{1}{m}\ln\tfrac{3}{2} \\ &= \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\tfrac{m-n+1}{m}\ln\tfrac{3}{2}-1\right) \\ &< \left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(\ln\tfrac{3}{2}-1\right) < 0. \end{aligned}$$

而在 $1 \leqslant n \leqslant 2$ 时，应当先证明

$$g(n) = (m+1-n)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]$$

是单调递减的 (从而, 问题化为 (11) 的证明). 这也要利用导致: 因为

$$\begin{aligned} &g'(n) = -\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \cdot m - \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\right] \\ &+(m-n+1)\cdot\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}} \cdot \tfrac{m-2}{m}\right]\ln\tfrac{3}{2}, \end{aligned}$$

于是 $g'(n) < 0$

$$\Leftarrow m\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(1-\ln\frac{3}{2}\right) > (m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\ln\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}$$

$$\Leftarrow m\left(1-\ln\frac{3}{2}\right) > (m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}\ln\frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-2)}{m}}$$

$$\Leftarrow m\left(1-\ln\frac{3}{2}\right) > (m-2)\ln\frac{3}{2}+1$$

$$\Leftarrow m\left(1-2\ln\frac{3}{2}\right) > 1-2\ln\frac{3}{2},$$

而 $1-2\ln\frac{3}{2} > 0\left(e=2.718\cdots > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2.25\right)$，所以上面最后的不等式成立。从而 $g(n)$ 递减。

□

证明. 题时, 可以考虑问题的推广与加强, 做得比要求更多一些.

两个变量之间如果有条件相关联, 那么实际是一个变量. 但在对一个变量求导时, 不要忘记另一个变量是它的函数, 也必须求导. 复合函数的求导法则是 $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$. 特别常用的是 $(f(ax+b))'=af'(ax+b)$,

$$\left(f\left(\frac{a}{x}\right)\right)'=f'\left(\frac{a}{x}\right)\left(-\frac{a}{x^2}\right).$$

□

例 5.5

已知 a,b 为正数, 并且

$$a+b=2, \tag{14}$$

求证: 在 $n>1$ 时,

$$a^n+b^n\geqslant 2. \tag{15}$$

证明. 在 $a=b=1$ 时, 显然 $a^n+b^n=2$.

不妨设 $a\geqslant 1\geqslant b$. $a^n+b^n=a^n+(2-a)^n=f(a)$ 是 a 的函数.

$$f'(a)=na^{n-1}-nb^{n-1}=n\left(a^{n-1}-b^{n-1}\right)\geqslant 0,$$

所以 $f(a)$ 递增, $f(a)\geqslant f(1)=2$. 即 (15) 式成立.

本题的 n，如果是自然数，可以不用导数来证明。但如果 n 是一般的实数，那么导数的利用就是非常必要了。

对于三个或更多个变量的条件不等式, 可以固定其中一些变数, 化为一元函数. 再经过调整得出所需要的结果.

□

例 5.6

已知 a,b,c 为非负实数，且 $a+b+c=1$. 求证:

$$(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2\geqslant 2.$$

证明. 注意到, 在 $a=1,b=c=0$ 时, 所证不等式成立. 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 固定 b , 则 $c=1-b-a$ 是 a 的函数.

考虑 a 的函数 $f(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$ ， 有

$f(a)$ 递减 $\Leftrightarrow f'(a)\leqslant 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -a(1-a^2)+c(1-c^2)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow (a-c)\left(a^2+ac+c^2-1\right)\leqslant 0\\
&\Leftrightarrow a^2+ac+c^2-1\leqslant 0\\
&\Leftarrow (a+c)^2\leqslant 1.
\end{aligned}$$

最后的不等式显然成立. 所以, $f(a)$ 递减. 可以使 a 增大 c 减小 ($a+c$ 保持不变), 而 $f(a)$ 一直减小, 直至 c 减小至 0. 于是, $(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2$ 减少为 $(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1$ (其中 $a+b=1$).

对函数 $\varphi(a)=(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+1(a+b=1)$ 采用同样的做法 (前面的 c 换成 b，可知 $\varphi(a)$ 递减. 所以，$\varphi(a)\geqslant(1-1^2)^2+(1-0^2)^2+1=2$.

因此，所证不等式成立.

由例 6 可以看出, 利用导数调整的步骤是:

(i) 选定目标，也就是不等式中等号成立（函数取最大值或最小值）的情况;

(ii) 固定一些变量，使函数成为一元函数;

(iii) 确定调整方向，也就是应证明该一元函数递增或递减;

(iv) 利用导数证明函数递增或递减，从而使一个变量调整到所需要的值;

(V) 继续采取上面的做法，直至使各个变量都调整到所需要的值.

□

例 5.7

已知 $x,y,z\in R^+$ ，且 $xyz=1$。求证:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}}{2}. \tag{16}$$

证明. 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$.

当 y<2 时, 固定 x, 则 $z=\frac{1}{xy}$.

函数 $f(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}$ 递减

$$\Leftrightarrow f'(y)\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{(1+z)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{xy^2}\leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{(1+y)^3}\geqslant\frac{z^2}{(1+z)^3}$$

$\Leftarrow \frac{y^2}{(1+y)^3}$ 递增 $\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{(1+y)^3}\right)'\geqslant 0$

$$\Leftrightarrow 2y(1+y)-3y^2=y(2-y)\geqslant 0.$$

最后一个不等式显然成立. 因此, $f(y)$ 递减. 此时, 可增大 z 减小 y, 直至 y = z.

当 $y\geqslant 2$ 时, 固定 z, 则 $x=\frac{1}{yz}$.

函数 $\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}$ 递减

$$\Leftrightarrow \varphi'(y)\leqslant 0$$

$\Leftrightarrow\cdots$ (前面的 z 换成 x)

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{(1+y)^3}\geqslant\frac{x^2}{(1+x)^3}$$

$\Leftarrow \frac{y^2}{(1+y)^3}$ 递减

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{(1+y)^3}\right)' \leqslant 0$$
$$\Leftrightarrow y(2-y) \leqslant 0.$$

最后一个不等式显然成立. 因此, $\varphi(y)$ 递减. 此时, 可减小 y 增大 x , 直至 $y=2$. 再用前面的方法调整使 $y=z$. 于是, 式 (16) 化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{2}{\sqrt{1+y}} \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}(xy^2=1, y \leqslant x).$$

函数 $h(y)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{2}{\sqrt{1+y}}$ 递增

$$\Leftrightarrow h'(y) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{y^3}-\frac{1}{(1+y)^{\frac{3}{2}}} \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow y^{-2}(1+y) \geqslant 1+x$$
$$\Leftrightarrow x(1+y) \geqslant 1+x$$
$$\Leftrightarrow xy \geqslant 1.$$

因为 $y \leqslant x, xy^2=1$ ，所以 $y \leqslant 1, xy \geqslant 1$ 。$h(y)$ 递增。可使 y 增大 x 减小，直至 $x=y=1$。在这个过程中，$h(y)$ 一直增加，直至取得最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 。

□

例 5.8

已知 $x, y, z \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, 且 $x+y+z=1$. 求证:

$$\sum\left(\frac{20}{15-9x^2}-9x^2\right) \leqslant \frac{9}{7}.$$

证明. 当 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，等号成立.

$\sum(-9x^2)$ 在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，取得最大值，但 $\sum \frac{20}{15-9x^2}$ 却不是在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时，取得最大值. 这一点先说明如下:

不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$. 固定 y , 则 $z=1-y-x$.

函数 $f(x)=\sum \frac{20}{15-9x^2}$ 递增

$$\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{(15-9x^2)^2}-\frac{z}{(15-9z^2)^2} \geqslant 0.$$

由于 $x \geqslant z, 15-9x^2 \leqslant 15-9z^2$ ，所以，最后一个不等式成立。从而，$f(x)$ 递增。

因此, 可使 x 增大 z 减小, 直至 z 变为 0. 在这个过程中, $\sum \frac{20}{15-9x^2}$ 一直增加. 同样, 可使 x 增大 y 减小, 直至 y 也变为 0, x 变为 1. 所以,

$$\sum \frac{20}{15-9x^2} \leqslant \frac{20}{15-9}+\frac{20}{15}+\frac{20}{15}=6.$$

最大值 6 在 $x=1, y=z=0$ 时取得.

因为 $\sum \frac{20}{15-9x^2} \leqslant 6$，所以，在 $9\sum x^2 \geqslant \frac{33}{7} = 6 - \frac{9}{7}$ 时，所证不等式成立.

设 $9\sum x^2 < \frac{33}{7}(< 5)$.

不妨设 $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant z$. 固定 y , 则 $z = 1 - y - x$.

函数 $F(x) = \sum \left(\frac{20}{15-9x^2} - 9x^2\right)$ 递减

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow F'(x) < 0\\
&\Leftrightarrow \frac{20x}{(15-9x^2)^2} - x - \frac{20z}{(15-9z^2)^2} + z < 0\\
&\Leftarrow \left(\frac{20x}{(15-9x^2)^2} - x\right)' < 0\\
&\Leftrightarrow 20(15+27x^2) - (15-9x^2)^3 < 0.
\end{aligned}$$

因为 $15 - 9x^2 > 15 - 5 = 10$ ，所以，

$$\begin{aligned}
&(15-9x^2)^3 - 20(15+27x^2) > 100(15-9x^2) - 20(15+27x^2)\\
&= 20(60 - 72x^2) > 20(60 - 8\times 5) > 0.
\end{aligned}$$

于是，$F(x)$ 递减. 可调小 x 增大 z，直至 x 或 z 成为 $\frac{1}{3}$. 在此过程中，$F(x)$ 一直增加.

不妨设 $z = \frac{1}{3}$ ，又设 $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant y$. 继续采用上面的做法，便知所证不等式成立，其中等号仅在 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时成立.

本例不适合用琴生不等式证明. 因为函数 $g(x) = \frac{20}{15-9x^2} - 9x^2$ 并非凸函数, 它的二阶导数与上面的 $20(15+27x^2) - (15-9x^2)^3$ 只差一个正因子. 而 $20(15+27x^2) - (15-9x^2)^3$ 并不恒负, 例如, $x = 1$ 或接近 1 时, 即取正值.

□

例 5.9

给定正整数 n. 求最小的正数 λ ，使对任何 $\theta_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)(i = 1, 2, \cdots, n)$ ，只要

$$\tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2 \cdot \cdots \cdot \tan\theta_n = 2^{\frac{n}{2}}, \tag{17}$$

就有

$$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n \leqslant \lambda. \tag{18}$$

(2003 年 CMO 试题, 黄玉民提供)

证明. 当 $n = 1$ 时, $\cos\theta_1 = (1 + \tan^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

设 $n \geqslant 2$. 令 $x_i = \tan^2\theta_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ ，则题设条件变为

$$x_1 x_2 \ldots x_n = 2^n. \tag{19}$$

要求最小的 λ ，使 $\sum \frac{1}{\sqrt{1+x_i}} \leqslant \lambda$.

不妨设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中 x_1 最大，则由式 (19) 有 $x_1 \geqslant 2$.

若 $x_2 \geqslant 2$ ，则与例 7 中 $y \geqslant 2$ 的情况完全一样 (x 即 x_1, y 即 x_2)，可以得出 $\sum \frac{1}{\sqrt{1+x_i}} = \varphi(x_2)$ 递减。从而，可调小 x_2 直至 $x_2 = 2$ ，这时，$\varphi(x_2)$ 一直增加。因此，可设 $x_2 \leqslant 2$ ，同样，可设

$x_3 \leqslant 2, x_4 \leqslant 2, \cdots, x_n \leqslant 2$ 。再由例 7 中 $y \leqslant 2$ 的情况，可逐步调整，使得 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 都调成 $\left(\frac{2^n}{x_1}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ 。于是，只须求最小的 λ ，使

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{n-1}{\sqrt{1+y}} \leqslant \lambda,$$

其中 $x \geqslant 2 \geqslant y, xy^{n-1} = 2^n$.

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{-(n-1)}{2(1+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(n-1)2^n}{y^n} \\ &= \frac{n-1}{2y}\left[\frac{x}{\sqrt{(1+x)^3}} - \frac{y}{\sqrt{(1+y)^3}}\right]. \end{aligned}$$

$g(y)$ 递增 $\Leftrightarrow g'(y) \geqslant 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{x^2}{(1+x)^3} \geqslant \frac{y^2}{(1+y)^3} \\ &\Leftrightarrow x^2(1+y)^3 - y^2(1+x)^3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

当 $n = 2$ 时， $xy = 2^2$

$$\begin{aligned} & y^2\left[x^2(1+y)^3 - y^2(1+x)^3\right] \\ &= 4^2(1+y)^3 - y(y+4)^3 \\ &= (2+y)(2-y)^3 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

所以， $g(y)$ 递增.

因此，最大值为 $g(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，即 $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

当 $n \geqslant 3$ 时， $xy^{n-1} = 2^n$

$$\begin{aligned} & y^{3n-5}\left[x^2(1+y)^3 - y^2(1+x)^3\right] \\ &= 2^{2n}y^{n-3}(1+y)^3 - \left(y^{n-1} + 2^n\right)^3 \\ &= (2^n - y^n)\left(y^{2n-3} + 2^n y^{n-3} + 3 \cdot 2^n y^{n-2} - 2^{2n}\right) \\ &\leqslant (2^n - y^n)(2^{2n-3} + 2^{2n-3} + 3 \cdot 2^{2n-2} - 2^{2n}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以， $g(y)$ 递减.

当 $y \to 0$ 时, $g(y) \to n-1$, 即 $\lambda = n-1$.

□

例 5.10

设 $a, b \in (0,1)$. 证明:

$$a^a + b^b \geqslant a^b + b^a. \tag{20}$$

证明. 指数是实数, 而不是整数, 通常 “初等方法” 难以奏效, 也就是必须利用导数.

不妨设 $a \geqslant b$ ， 考虑函数 $f(x) = x^b - x^a$. (20) 即

$$b^b - b^a \geqslant a^b - a^a, \tag{21}$$

因此, 我们希望 $f(x)=x^b-x^a$ 在 $x\geqslant b$ 时是减函数 (从而由 $a\geqslant b$, (21) 成立). 求导

$$f'(x)=\left(x^b-x^a\right)'=bx^{b-1}-ax^{a-1}=ax^{b-1}\left(\frac{b}{a}-x^{a-b}\right). \tag{22}$$

在 $x\geqslant\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ 时, $f'(x)\leqslant 0$, 函数 $f(x)=x^b-x^a$ 递减（在 $x=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}}$ 时，函数取最大值）.

因此, 只需证明 $b\geqslant\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a-b}}$. (23)

$$(23)\Leftrightarrow\frac{b}{a}\leqslant b^{a-b}$$

$$\Leftrightarrow b\leqslant a^{\frac{1}{1-a+b}}. \tag{24}$$

而由贝努里不等式

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{1-a+b}}&=[1-(1-a)]^{\frac{1}{1-a+b}}\\&\geqslant 1-(1-a)\cdot\frac{1}{1-a+b},\end{aligned} \tag{25}$$

因此

$$(24)\Leftarrow 1-(1-a)\cdot\frac{1}{1-a+b}\geqslant b$$

$$\Leftrightarrow(1-b)(1+b-a)\geqslant 1-a \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow 1-b^2-a+ab\geqslant 1-a$$

$$\Leftrightarrow a\geqslant b. \tag{27}$$

最后一个不等式显然成立, 因此本题结论成立.

我们用 x^b-x^a 而不用 b^x-a^x ，因为前者的导数较为简单，后者将产生对数函数等超越函数, 难以处理.

□

5.1 习题 5

练习 5.1. 证明: 在区间 $[0,+\infty)$ 上, 函数 $x-(1+x)\ln(1+x)$ 递减.

练习 5.2. 证明: 实数 $m\geqslant 2$ 时, $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\geqslant\frac{9}{4}$.

练习 5.3. m, n 为实数. 证明: $m\geqslant 2$ 并且 $m\geqslant n\geqslant 1$ 时, $1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$.

练习 5.4. 利用上题 (m,n 意义同上) 证明例 4 中的 (10).

练习 5.5. 已知 a,b 是正数, 自然数 $n\geqslant 2$. 求证:

$$\frac{a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n}{n+1}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

练习 5.6. 设 a,b,c 是正实数，且 $a+b+c=3$. 证明:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant a^2+b^2+c^2.$$

练习 5.7. 已知 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$ ，且 $a+b+c=3$. 求证: $ab^2+bc^2+ca^2\leqslant\frac{27}{8}$.

练习 5.8. 已知 $x,y,z\in R^{+}\cup\{0\}$ ，且 $x+y+z=\frac{1}{2}$. 求 $\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1}$ 的最大值与最小值.

练习 5.9. 设 $x+y+z=1$ ，其余条件不变，解上题.

练习 5.10. 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+},x+y+z=1$. 求证: $\sum\frac{1}{1+x^{2}}\leqslant\frac{27}{10}$.

练习 5.11. 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$. 求证: 对于实数 $k\geqslant 2$,

$$\frac{a^{k}}{a+b}+\frac{b^{k}}{b+c}+\frac{c^{k}}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}.$$

练习 5.12. a,b,c 为正实数. 求证:

(a) $0<\lambda\leqslant\frac{5}{4}$ 时, $\frac{a}{\sqrt{a^{2}+\lambda b^{2}}}+\frac{b}{\sqrt{b^{2}+\lambda c^{2}}}+\frac{c}{\sqrt{c^{2}+\lambda a^{2}}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$.

(b) $\lambda>\frac{5}{4}$ 时, $\frac{a}{\sqrt{a^{2}+\lambda b^{2}}}+\frac{b}{\sqrt{b^{2}+\lambda c^{2}}}+\frac{c}{\sqrt{c^{2}+\lambda a^{2}}}<2$.

答案

习题 1

练习 1.1. $t^4-t+\frac{1}{2}=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2>0$.

练习 1.2. 两边平方并注意 $(a+b)(b+c)(c+a)=ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2abc$, 原不等式等价于 $b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}+a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}>abc$. 由于 $\sqrt{ac(a+b)(b+c)}>\sqrt{ac\cdot a\cdot c}=ac$ 等，上式成立.

练习 1.3. 原不等式等价于 $\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\cdots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)}\leqslant 0$. 易知 $\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)}\leqslant\frac{x_k-1}{4}$ (当 $x_k>1(<1)$ 时，$(1+x_k^2)(1+x_k)\geqslant 4(\leqslant 4)$)，所以

$$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\cdots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)}\leqslant\frac{(x_1-1)+\cdots+(x_n-1)}{4}=0.$$

练习 1.4. $f=\frac{2am-m^2+n^2}{n}-(m+n)$ 是整数. 由 (ii), m,n 奇偶性相同, 且 $\frac{2am-m^2+n^2}{n}$ 是偶数, 所以 f 也是偶数. (iii) 即 $n^2+2mn\leqslant 2an-m(2a-m)<2an$, 所以 $n+2m<2a$. 于是 f 为正数, $f\geqslant 2$. 取 $m=2,n=2000$, 则 (i), (ii), (iii) 均成立, $f=2$, 所以 $\min f=2$. 由 (iii) $2mn\leqslant(n-m)(2a-n-m)$, 所以 $n>m$. 设 $m=n-2t$. (iii) 即 $2t(a+t)\geqslant n^2$. $f=\frac{(n-2t)(2a-2n+2t)}{n}=2a-2n-\frac{2t(2a-3n+2t)}{n}$. $t=1$ 时, $f=2a+6-2\left(n+\frac{2(a+1)}{n}\right)$. $n\mid 2(a+1)=4\times 7\times 11\times 13$, 且 $n^2\leqslant 2(a+1),n\leqslant 64$. 所以 $n\leqslant 52,f\leqslant 2a+6-2(52+77)=3750$. $t\geqslant 2$ 时, $f\leqslant 2a-2n-\frac{4(2a-3n+4)}{n}=2a+12-2\left(n+\frac{4(a+2)}{n}\right)\leqslant 2a+12-4\sqrt{4(a+2)}<3750$. 在 $m=50$, $n=52$ 时，(i)，(ii)，(iii) 均成立，$f=3750$，所以 $\max f=3750$.

练习 1.5. 设 $A\geqslant B\geqslant C$. (a) $\cos A+\cos B+\cos C\leqslant\cos 60^\circ+\cos(A+C-60^\circ)+\cos B\leqslant\cos 60^\circ+2\cos 60^\circ=\frac{3}{2}$.

(b) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\sin\frac{60^\circ}{2}\sin\frac{A+C-60^\circ}{2}\sin\frac{B}{2}\leqslant\left(\sin\frac{60^\circ}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

练习 1.6. $\sin A+\sin B+\sin C>\sin 90^\circ+\sin(A+C-90^\circ)+\sin B=1+\cos B+\sin B>2$.

练习 1.7. $\sin A+\sin C-\cos A-\cos C=2\cos\frac{A-C}{2}\left(\sin\frac{A+C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)$

$$\leqslant 2\cos\frac{A+C-120^\circ}{2}\left(\sin\frac{A+C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)$$

$$=\sin 60^\circ+\sin(A+C-60^\circ)-\cos 60^\circ-\cos(A+C-60^\circ).$$

$$\sin B+\sin(120^\circ-B)-\cos B-\cos(120^\circ-B)=2(\sin 60^\circ-\cos 60^\circ)\cos(B-60^\circ)$$

$$\leqslant 2\left(\sin 60^\circ - \cos 60^\circ\right).$$

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时,

$$\sin A+\sin C-\cos A-\cos C \geqslant \sin 90^\circ+\sin(A+C-90^\circ)-\cos 90^\circ-\cos(A+C-90^\circ),$$

$$\sin B+\sin(A+C-90^\circ)-\cos B-\cos(A+C-90^\circ)=0.$$

练习 1.8. 在 $\frac{x}{k_1},\frac{y}{k_2},\frac{z}{k_3}$ 中不妨设 $\frac{x}{k_1}$ 最大. 若 $\frac{y}{k_2}\geqslant\frac{z}{k_3}$, 令 $a=\frac{x}{k_1}-\frac{y}{k_2},b=\frac{y}{k_2}-\frac{z}{k_3}$, 原不等式等价于 $(1-2k_3-2k_1k_2)a^2+(1-2k_1-2k_2k_3)b^2+(1-2k_2-2k_1k_3)(a+b)^2=2(k_1a-k_3b)^2+2ab(1-2k_2)\geqslant 0$. 若 $\frac{y}{k_2}<\frac{z}{k_3}$, 令 $a=\frac{z}{k_3}-\frac{y}{k_2},b=\frac{x}{k_1}-\frac{z}{k_3}$, 原不等式等价于 $(1-2k_3-2k_1k_2)(a+b)^2+(1-2k_1-2k_2k_3)a^2+(1-2k_2-2k_1k_3)b^2\geqslant 0$. 或将 k_1,k_2,k_3 作为三角形的三条边, 则原不等式即例 8.

练习 1.9. 可设 $0=x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant 1$, 并且非负数 $u=x_2,v=x_3-x_2,w=x_4-x_3$ 均 $\leqslant 1-x_4=t=1-u-v-w$. 要求出 $\sigma=u^2+v^2+w^2+(u+v)^2+(v+w)^2+(u+v+w)^2$ 的最大值。σ 是 u 的二次函数, 系数均 $\geqslant 0$, 所以 σ 随 u 递增, 在 $u=t=\frac{1-v-w}{2}$ 时最大, 即 $\sigma\leqslant\sigma_1=\left(\frac{1-v-w}{2}\right)^2+v^2+w^2+\left(\frac{1+v-w}{2}\right)^2+(v+w)^2+\left(\frac{1+v+w}{2}\right)^2$. 同样 σ_1 在 $v=t=\frac{1-w}{3}$ 时最大, 这时 $u=v=t=\frac{1-w}{3},\sigma\leqslant\sigma_2=6t^2+(1-3t)^2+(1-2t)^2+(1-t)^2$. 显然 $t\leqslant\frac{1}{3}$, 并且 $1-t=u+v+w\leqslant 3t$, 所以 $t\geqslant\frac{1}{4}$. σ_2 在 $t=\frac{1}{4}$ 时取得最大值 $\frac{5}{4}$. 所以 $\sigma\leqslant\frac{5}{4}$, 在 $u=v=w=t=\frac{1}{4}$ 的取得, 即 a 的最小值为 $\frac{5}{4}$.

练习 1.10. $2(\sum a^3b^3-3a^2b^2c^2)=(ab+bc+ca)((a-c)^2b^2+(b-a)^2c^2+(c-b)^2a^2)\geqslant(a+b$

$$+c)((a-c)^2+(b-a)^2+(c-a)^2)=2\left(a^3+b^3+c^3-3abc\right).$$

$$\begin{aligned}&\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z-2\sin x\cos y-2\sin y\cos z\leqslant\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)+\sin(y+z)\\&\cos(y-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)-2\sin x\cdot\cos y\cos(x-y)-2\sin y\cos z\cos(y-z)=\\&\sin(y-x)\cos(x-y)+\sin(z-y)\cos(y-z)+\sin(z+x)\cos(z-x)\leqslant\tfrac{1}{2}[\sin 2(y-x)+\\&\sin 2(z-y)]+\cos(z-x)\leqslant\sin(z-x)+\cos(z-x)\leqslant\sqrt{2}.\end{aligned}$$

练习 1.11. 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$. 原式左边 $\geqslant x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)\geqslant y(x-y)(x-z)-y(x-y)(y-z)=y(x-y)^2\geqslant 0$.

13.(a)在上题中令 $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{c+a-b}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$ 即可。(b)即 $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$ 。

习题 2

练习 2.1. $(x+y)(x+z)=(x^2+xy+xz)+yz\geqslant 2\sqrt{(x^2+xy+xz)yz}=2$. 最小值为 2.

练习 2.2. 不妨设 $a+b+c+d=1$. $(b+c)(d+a)\leqslant\left(\frac{(b+c)+(d+a)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, 所以 $\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}=\frac{a^2+ad+c^2+bc}{(b+c)(d+a)}\geqslant 4(a^2+c^2+ad+bc)$. 同理 $\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}\geqslant 4(b^2+d^2+ab+cd)$. 相加即得结果. 这不等式属于 Shapiro.

练习 2.3. 上题 $d=0$ 的特例. 或由 $\frac{c}{a}+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{c}\geqslant 3$ 得出结果.

练习 2.4. 两边加上 n 化为等价不等式 $\sum \frac{1}{1-a_i} \geqslant \frac{n^2}{n-S}$. 而

$$(n-S)\sum \frac{1}{1-a_i} = \sum (1-a_i)\cdot \sum \frac{1}{1-a_i} \geqslant n^2.$$

练习 2.5. $\frac{1}{n}(S_n+n) = \frac{1}{n}\sum \frac{k+1}{k} \geqslant \left(\prod \frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{n}} = (n+1)^{\frac{1}{n}}$.

$$n - S_n = \sum \frac{k-1}{k} \geqslant (n-1)\left(\prod \frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{n-1}} = (n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

练习 2.6. 即第 1 讲例 1. 或设 a,b,c,A,B,C 中 a 为最大, 则左边 $\langle a(B+b)+aA < ak+kA = k^2$. 或考虑以 $a+A$ 为边的正三角形, 利用面积来证.

练习 2.7. 化为等价的不等式 $a^3+b^3 \geqslant a^2b+b^2a$. 对数列 a^2, b^2 及 a, b 用排序不等式即得.

练习 2.8. 设 $s_i = \frac{a_i+b_i+c_i}{2}, t_i = s_i - a_i, u_i = s_i - b_i, v_i = s_i - c_i$ ， 则 $\sqrt{\triangle_1}+\sqrt{\triangle_2} = \sqrt[4]{s_1t_1u_1v_1} + \sqrt[4]{s_2t_2u_2v_2} \leqslant \sqrt{(\sqrt{s_1t_1}+\sqrt{s_2t_2})(\sqrt{u_1v_1}+\sqrt{u_2v_2})} \leqslant \sqrt{\sqrt{(s_1+s_2)(t_1+t_2)}\sqrt{(u_1+u_2)(v_1+v_2)}} = \sqrt{\triangle}$.

练习 2.9. 不妨设 $a+b+c=1$ ， 否则用 $\frac{a}{a+b+c}$ 代替 $a,\cdots,3\sum \frac{a^n}{b+c} \geqslant (a^n+b^n+c^n)\sum \frac{1}{b+c}$ （排序不等式)， $2\sum \frac{1}{b+c} = \sum \frac{1}{b+c}\cdot\sum(b+c) \geqslant 3^2, \frac{1}{3}\sum a^n \geqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ （幂平均不等式). 由以上诸式不难得出结论.

练习 2.10. $2x_ix_{i+1} - x_i - x_{i+1} \geqslant x_ix_{i+1} - 1$. 对 i 求和即得结论

练习 2.11. $(4m_bm_c)^2 - (2a^2-4b^2-4c^2+9bc)^2 = 18(b-c)^2(a^2-(b-c)^2)$.

练习 2.12. 只需证明 $\frac{x}{1-x^2} \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ ， 即 $2x^2(1-x^2)^2 \leqslant \frac{8}{27}$ ， 由算术-几何平均不等式得

$$2x^2\cdot(1-x^2)^2 \leqslant \left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

练习 2.13. 如果 $a-1+\frac{1}{b}, b-1+\frac{1}{c}, c-1+\frac{1}{a}$ 中有负数, 不妨设 $a-1+\frac{1}{b}<0$ ， 那么有 $a<1, b>1$ ， 从而另两个式子都是正的, 三个式子的积为负, 显然小于 1。如果三个式子都是非负的, 设它们的积为 A ， 那么

$$\begin{aligned} A &= a\left(1-\tfrac{1}{a}+c\right)\cdot b\left(1-\tfrac{1}{b}+a\right)\cdot c\left(1-\tfrac{1}{c}+b\right) \\ &= \left(1-\tfrac{1}{a}+c\right)\left(1-\tfrac{1}{b}+a\right)\left(1-\tfrac{1}{c}+b\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{c}-b+1\right)\left(\tfrac{1}{a}-c+1\right)\left(\tfrac{1}{b}-a+1\right), \end{aligned}$$

$$A^2 = \left(1-\frac{1}{a}+c\right)\left(1-\frac{1}{b}+a\right)\left(1-\frac{1}{c}+b\right)\cdot\left(\frac{1}{c}-b+1\right)\left(\frac{1}{a}-c+1\right)\left(\frac{1}{b}-a+1\right)$$

$$\leqslant \left(\frac{1+1+1+1+1+1}{6}\right)^6 = 1. \text{ 从而} A \leqslant 1.$$

或者将不等式展开化为 $\sum a + \sum \frac{1}{a} \leqslant 3 + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$. 可设 a,b,c 中仅有 $a \geqslant 1$ （否则用 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 代替 c,b,a). $1-b+\frac{b}{a}-\frac{1}{a} = \frac{1}{a}(1-b)(a-1) > 0, 2-c-\frac{1}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}-a-\frac{1}{b} = -(1-c)\left(\frac{1}{c}-1\right)+\frac{1-c}{bc}(ab-c) > (1-c)\left(\frac{1}{c}-1\right)(a-1) > 0$. 相加即得.

练习 2.14. $a_1+a_2-2-\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{a_1+a_2-a_3}$

$$=\frac{a_3^2+(2-a_1-a_2)a_3+2a_1a_2-2a_1-2a_2}{a_1+a_2-a_3}$$

$$=\frac{(a_3-2)(a_3+4-a_1-a_2)+2(a_1-2)(a_2-2)}{a_1+a_2-a_3}\geqslant 0.$$将n个这样的式子相加即得.

习题 3

练习 3.1. (a) $cd+ab\geqslant \min(b,d)\cdot(a+c)=\min(b,d)>bd.$

(b) $c^2+a^2+ac>\max(a,c)\cdot(a+c)=\max(a,c)\cdot(b+d)>bc+ad.$

(c) 原式等价于 $mn(c^2+a^2+ac-bc-ad)+m^2(cd+ab-bd)>0$ ，利用 (i)，(ii) 即得.

练习 3.2. 仿例 $12, a=2f(1)+2f(0)-4f\left(\frac{1}{2}\right), b=4f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)-3f(0), c=f(0)$. 因此 $|a|\leqslant 8, |b|\leqslant 8, |c|\leqslant 1, |a|+|b|+|c|\leqslant 17$ ，二次式 $8x^2-8x+1$ 使 $|a|+|b|+|c|$ 达到最大值 17.

练习 3.3. (a) $0\leqslant c\leqslant 1, |b|\leqslant 2\sqrt{ac}$. 若 $a\leqslant 1$, 则 $a+|b|+|c|\leqslant 4$. 若 $a>1$, 则 $1\geqslant a+b+c\geqslant a+c-2\sqrt{ac}=(\sqrt{a}-\sqrt{c})^2\geqslant(\sqrt{a}-1)^2, 2\geqslant\sqrt{a}, a+|b|+|c|=a-b+c\leqslant a+c+2\sqrt{ac}=(\sqrt{a}+\sqrt{c})^2\leqslant 9.4x^2-4x+1$ 使最大值实现.

(b) $-b\geqslant 2a.-1\leqslant a+b+c$ 及 $c\leqslant 1$ 导出 $2\geqslant -a-b\geqslant -a+2a=a, a+|b|+|c|=a-b+|c|\leqslant -a-b-c+2a+2|c|\leqslant 1+4+2=7.2x^2-4x+1$ 使最大值实现.

(c) $a+|b|+|c|=a+b+|c|\leqslant a+b+c+2|c|\leqslant 1+2=3.x^2+x-1$ 使最大值实现.

(d) $8x^2-8x+1$ 使最大值实现, 参见第 2 题.

(e) $\frac{b^2-4ac}{4a}\leqslant 1$, 所以 $b^2\leqslant 4a(1+c)$. $1\geqslant a+b+c\geqslant a-2\sqrt{a(c+1)}+c=(\sqrt{a}-\sqrt{c+1})^2-1$, 从而 $\sqrt{2}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{c+1}$. $a+|b|+|c|=a-b-c\leqslant a+2\sqrt{a(c+1)}-c=(\sqrt{a}+\sqrt{c+1})^2-1-2c\leqslant(\sqrt{2}+2\sqrt{c+1})^2-1-2c=5+2c+4\sqrt{2(c+1)}\leqslant 5+4\sqrt{2}$. $(1+\sqrt{2})^2x^2-2(1+\sqrt{2})x$ 使最大值实现.

练习 3.4. 设 $|a-h|=\langle a\rangle$ ，则 a 到其他数的距离分别 $\geqslant\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$ 及 $\frac{2}{2},\frac{4}{2},\frac{6}{2},\cdots$. 结论由此立即得出.

练习 3.5. 由习题 1 第 11 题 Schur 不等式，$\sum x^3-\sum x^2(y+z)+3xyz\geqslant 0$ ，即 $(\sum x)^3-4\sum x\cdot\sum yz+9xyz\geqslant 0$ ，从而 $\sum yz-2xyz\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}xyz\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{7}{27}$. 另一方面，x,y,z 均 $\leqslant 1$ ，所以 $\sum xy-2xyz\geqslant\sum xy-yz-xy\geqslant 0$.

练习 3.6. 考虑圆 C, C_i, C_{i+1} 的圆心所成三角形 OO_iO_{i+1} . 设 $\angle O_iOO_{i+1}=2\alpha_i$, 内切圆半径为 r , 则 $\tan\alpha_i=\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{Rr_ir_{i+1}}}{R\sqrt{R+r_i+r_{i+1}}}$. 由 $\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上下凸, 得 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\frac{\pi}{6}=\tan\frac{\sum\alpha_i}{6}\leqslant\frac{1}{6}\sum\tan\alpha_i$. 结合上式及 $\frac{3\sqrt{3}\sqrt{Rr_ir_{i+1}}}{\sqrt{R+r_i+r_{i+1}}}\leqslant R+r_i+r_{i+1}$ (A-G 不等式), 得 $6R\leqslant\frac{1}{3}\sum(R+r_i+r_{i+1})$ ，即 $R\leqslant\frac{1}{6}\sum r_i$. 同样, $\sqrt{3}=\cot\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{1}{6}\sum\frac{R\sqrt{R+r_i+r_{i+1}}}{\sqrt{Rr_ir_{i+1}}}$ ，因而 $\frac{6\sqrt{3}}{R}\leqslant\sum\sqrt{\frac{1}{r_ir_{i+1}}+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_{i+1}}\right)}\leqslant\sum\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_{i+1}}+\frac{1}{R}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum\left(\frac{1}{r_i}+\frac{1}{r_{i+1}}+\frac{1}{R}\right)$.

练习 3.7. $\sum \frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} - \sum \frac{x_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}} = \sum (x_i - x_{i+1}) = 0$ ，所以 $\sum \frac{x_i^2}{x_i+x_{i+1}} = \frac{1}{2}\sum \frac{x_i^2+x_{i+1}^2}{x_i+x_{i+1}} \geqslant \frac{1}{4}\sum (x_i + x_{i+1}) = \frac{1}{2}$.

练习 3.8. $Q\sum x_k B_k \geqslant \left(\sum x_k\right)^2 = \sum x_k^2 + 2\sum_{i\neq j} x_i x_j > \sum x_k B_k$,所以 Q > 1。由于 $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) + Q(x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1) = n$ ，所以 $Q < n-1$。$Q(1, t, t^2, \cdots, t^{n-1})$ 在 $t \to \infty$ 时趋于 1，所以 1, n - 1 均为最佳。

练习 3.9. 当 $n \geqslant 4$ 时，$\left(\sum a_i\right)^2 - (a_1 - a_2 + \cdots \pm a_n)^2 \geqslant 4\sum a_i a_{i+1} = 4$ ，所以 $\sum a_i \geqslant 2$ ，在 $a_n = a_{n-1} = 1$, 其余为 0 时取得最小值 2。n = 2 的情况也是如此。n = 3 时, $\sum a_i \geqslant \sqrt{3}\cdot\sqrt{\sum a_i a_{i+1}} = \sqrt{3}$ 。在 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取得最小值 $\sqrt{3}$ 。

练习 3.10. $\frac{a}{2a+b+c} \leqslant \frac{a}{2\sqrt{(a+b)(a+c)}}$,等等。令 $\frac{x}{\sqrt{b+c}} = x'$,等等,则原不等式可由 $\sum ay'z' \leqslant \frac{1}{2}\sum (b+c)x'^2$ 推出。而这一不等式即 $\sum a(y'-z')^2 \geqslant 0$ 。

练习 3.11. 可设 $x+y+z = 1, x \geqslant y \geqslant z$. $\sum \frac{4yz}{x(y+z)^2} = \sum \frac{(y+z)^2-(y-z)^2}{x(y+z)^2} = \sum \frac{1}{x} - \sum \frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2} = \sum \frac{1}{x}\cdot\sum x - \sum \frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2} = 9 + \sum \left(\sqrt{\frac{z}{y}} - \sqrt{\frac{y}{z}}\right)^2 - \sum \frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2} = 9 + \sum \left(\frac{(y-z)^2}{yz} - \frac{(y-z)^2}{x(y+z)^2}\right) = 9 + Q.$

其中 $Q = \sum (y-z)^2 \left(\frac{1}{yz} - \frac{1}{x(y+z)^2}\right)$.

由于 $x > \frac{1}{4}$ 所以 $\frac{1}{yz} \geqslant \frac{4}{(y+z)^2} > \frac{1}{x(y+z)^2}$. 又 $\frac{1}{xz} - \frac{1}{y(x+z)^2} \geqslant 0, y(x+z)^2 \geqslant xz(x+y+z), x^2(y-z) + xz(y-z) + yz^2 \geqslant 0$. 因此

$Q \geqslant (x-y)^2 \left(\frac{1}{xz} - \frac{1}{y(x+z)^2} + \frac{1}{xy} - \frac{1}{z(x+y)^2}\right)$. 而后一因式 $= \frac{(x+z)^2-x}{xy(x+z)^2} + \frac{(x+y)^2-x}{xz(x+y)^2} \geqslant \frac{(x+y)^2-x+(x+z)^2-x}{xy(x+z)^2} = \frac{2x^2+2xy+2xz+y^2+z^2-2x(x+y+z)}{xy(x+z)^2} \geqslant 0$.

练习 3.12. $\frac{G^n}{H} = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n (a_1^{-1} + \cdots + a_n^{-1})}{n} = \frac{1}{n}\sigma_{n-1} \leqslant A^{n-1}$ （马克劳林不等式）.

所以 $\frac{A}{H} \leqslant \left(\frac{A}{G}\right)^n \leqslant \left(\frac{A}{G}\right)^n + \frac{n-2}{n}\left(\left(\frac{A}{G}\right)^n - 1\right) = -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n}\left(\frac{A}{G}\right)^n$.

练习 3.13. 令 $S = \sum \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n$. 因为 $\frac{1}{n+1}\sum \frac{x_i}{x_{i+1}} \geqslant \sqrt[n+1]{\prod \frac{x_i}{x_{i+1}}} = 1$, 所以 $\frac{S}{n+1} \geqslant \left(\frac{1}{n+1}\sum \frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n$ (幂平均不等式) $> \frac{1}{n+1}\sum \frac{x_i}{x_{i+1}}$, 即 $S \geqslant \sum \frac{x_i}{x_{i+1}}$. 又 $\frac{S - \left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n}{n} \geqslant \frac{x_{i+1}}{x_i}$ (算术-几何平均不等式), 求和即得 $S \geqslant \sum \frac{x_{i+1}}{x_i}$.

习题 4

练习 4.1. 当 $n = 1$ 时, 取 $S = a_1$. 设适当选择正负号可使 $S' = \pm a_2 \pm a_3 \pm \cdots \pm a_n$ 满足 $0 \leqslant S' \leqslant a_2$. 若 $a_1 \leqslant S'$ ，取 $S = S' - a_1$. 若 $S' \leqslant a_1$ ，取 $S = a_1 - S'$.

练习 4.2. 易证 $a_n > n$.

练习 4.3. $k = 1$ 显然. 设 $\frac{a_2}{(a_1'+a_2)^{n+1}} + \cdots + \frac{a_k}{(a_1'+a_2+\cdots+a_k)^{n+1}} < \frac{1}{a_1'^n}$ ，其中 $a_1' = a_0 + a_1$. 由 $\frac{1}{a_0^n} - \frac{1}{a_1'^n} = \frac{(a_0+a_1)^n - a_0^n}{a_0^n a_1'^n} > \frac{a_0^{n-1}a_1}{a_0^n a_1'^n} > \frac{a_1}{(a_0+a_1)^{n+1}}$ ，结合上式便得.

练习 4.4. $D_n - C_n = D_{n-1} - C_{n-1} + (n-1)(b_n - b_{n-1})^2, D_n - 2C_n = D_{n-1} - 2C_{n-1} - \frac{n-2}{n-1}(a_n - b_n)^2.$

练习 4.5. 设 $(n-1)(a_1 + \cdots + a_{2n-1}) \geqslant n(a_2 + \cdots + a_{2n})$. 要证命题对 n 成立只需证 $a_1 + \cdots + a_{2n-1} + na_{2n+2} \geqslant a_2 + \cdots + a_{2n-2} + (n+1)a_{2n}$ ，即 $n(a_{2n+1} - a_{2n}) \geqslant (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{2n} - a_{2n-1})$

. 由于 $a_{i+2}-a_{i+1}\geqslant a_{i+1}-a_i$ ，所以 $a_{i+1}-a_i$ 递增，上面的不等式成立.

练习 4.6. 用归纳法证明 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=a_n+a_{n+1}-2a_1$ ，从而不等式成立。

练习 4.7. $a_1+a_2-a_1a_2-1=-(1-a_1)(1-a_2)<0$. 从 n 进到 $n+1$ 的证明与 $n=2$ 的证明相同.

练习 4.8. 不妨设 $a_k\leqslant\frac{1}{2}(k=1,2,\cdots,n+1)$. 利用对 n 的归纳假设及 $\prod_{k=1}^{n}a_k<\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)$ ，得 $a_{n+1}\prod_{k=1}^{n}a_k+(1-a_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\geqslant\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}a_k+\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{n}(1-a_k)\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^n}$.

练习 4.9. (a) $n=2$ 时，不等式等价于 $(a_1-a_2)^2(1-a_1-a_2)\geqslant 0$. 设命题对 2^m 成立，则对于 $n=2^{m+1}$ 有 $\frac{\sum a_k}{\sum(1-a_k)}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n/2}\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{\sum\limits_{k=1}^{n/2}\left(1-\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}\right)}\geqslant\left(\prod\limits_{k=1}^{n/2}\frac{\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{1-\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}\right)^{n/2}=$

$\left(\prod_{k=1}^{n/2}\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{(1-a_{2k-1})+(1-a_{2k})}\right)^{n/2}\geqslant\left(\prod_{k=1}^{n/2}\left(\frac{a_{2k-1}a_{2k}}{(1-a_{2k-1})(1-a_{2k})}\right)^{1/2}\right)^{2/n}=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k}{1-a_k}\right)^{1/n}$. 采用向前的归纳法，即假定命题对 n 成立，证明命题对 n-1 成立。这只需令 $a_n=\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$ ，代入归纳假设得 $\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_k}{\sum_{k=1}^{n-1}(1-a_k)}\geqslant\left(\prod_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{1-a_k}\right)^{1/n}\cdot\left(\frac{\sum_{k=1}^{n-1}a_k}{\sum_{k=1}^{n-1}(1-a_k)}\right)^{1/n}$ ，再化简即可。

(b) 在 (a) 中将 a_k 换为 $1-a_k$ 即可.

练习 4.10. $\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}=\frac{1}{n+a_{k-1}}$. 所以 $a_n>a_{n-1}>\cdots>a_1>a_0=\frac{1}{2}$ ，$\frac{1}{a_{k-1}}-\frac{1}{a_k}<\frac{1}{n}$. 令 $k=1,2,\cdots,n$ ，并将所得不等式相加得 $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}<n\cdot\frac{1}{n}=1$. 所以 $\frac{1}{a_n}>\frac{1}{a_0}-1=1$ ，即 $a_n<1$ 。于是 $\frac{1}{a_{k-1}}-$

$\frac{1}{a_k}>\frac{1}{n+1}$. 再令 $k=1,2,\cdots,n$ ，相加得 $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}>\frac{n}{n+1}$. 于是 $\frac{1}{a_n}<\frac{1}{a_0}-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1},a_n>\frac{n+1}{n+2}>1-\frac{1}{n}$.

练习 4.11. $n=3$ 时，左边一右边 $=(x_3-x_2)(x_2-x_1)>0$ ，由此可猜想对一般的 n ，左边与右边之差，这个二次式应当是若干个形如 $(x_3-x_2)(x_2-x_1)$ 的和. 事实上，$\sum_{k<h}\sum_{i<j}(x_k-x_i)(x_h-x_j)=\sum_{k<h}(\mathrm{C}_n^2x_kx_h-x_h\sum_{i<j}x_i-x_k\sum_{i<j}x_j+\sum_{i<j}x_ix_j)=2\mathrm{C}_n^2\sum_{i<j}x_ix_j-2\sum_h(h-1)x_h\sum_i(n-i)x_i$ ，恰好是原不等式左边减右边所得差的 2 倍. 和 $\sum_{k<h}\sum_{i<j}(x_k-x_i)(x_h-x_j)$ 的项 $(x_k-x_i)(x_h-x_j)$ 记为 (h,k,j,i) ，其中负项的下标满足 $h>j>i>k$ 或 $j>h>k>i$ ，它与 (h,i,j,k) ，即 $(x_i-x_k)(x_h-x_j)$ 相抵消，和中正项 $(x_k-x_i)(x_h-x_k)(h>k>i)$ 显然不与任何负项抵消. 因此和 $\sum_{k<h}\sum_{i<j}(x_k-x_i)(x_h-x_j)>0$ ，即原不等式成立.

本题也可用归纳法证明.

练习 4.12. 本题只需证明对 n,t，存在实数 $\lambda>1$ ，并且 λ 充分接近 1，使 $\frac{1}{2}\lambda^n+\frac{1}{2}<[t\lambda+(1-t)]^n$ (再取 $b\in(1999,2000),a=\lambda b$)。而 $[t\lambda+(1-t)]^n=[t(\lambda-1)+1]^n>1+nt(\lambda-1)$ ，$\frac{1}{2}\lambda^n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+1)$,只需证明存在充分接近 1 且大于 1 的 λ ,使 $2nt>\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+1$ 。即 $(2t-1)n>(\lambda^{n-1}-1)+(\lambda^{n-2}-1)+\cdots+(\lambda-1)=(\lambda-1)[(\lambda^{n-2}+\lambda^{n-3}+\cdots+1)+(\lambda^{n-3}+\lambda^{n-4}+\cdots+1)+\cdots+1]$ 。$(\lambda^{n-2}+\lambda^{n-3}+\cdots+1)+(\lambda^{n-3}+\lambda^{n-4}+\cdots+1)+\cdots+1<2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2<2^n$ 。因此当 $1<\lambda<\frac{(2t-1)^n}{2^n}+1$ 时即满足要求。

习题 5

练习 5.1. $(x-(1+x)\ln(1+x))'=1-(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}-\ln(1+x)=-\ln(1+x)<0.$

练习 5.2. $((1+x)^{\frac{1}{x}})'=-\frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}\ln(1+x)+\frac{1}{x}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}(x-(1+x)\ln(1+x))$. 由第 1 题，$x-(1+x)\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 时最大，即 $x-(1+x)\ln(1+x)\leqslant 0$，所以 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减。$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增。

练习 5.3. 由贝努里不等式，$1-\frac{n}{m+1}<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}$. 利用上题，$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mn}}<\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

4.(10) 即 $\left(1-\frac{n}{m+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<m-1$. 由上题, 只需证 $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<m-1$. 即 $1-t^m<m(1-t)$，其中 $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$。由于 $0<t<1, \frac{1-t^m}{1-t}=1+t+t^2+\cdots+t^{m-1}<m$.

练习 5.4. 可设 $a+b=2$ （否则用 $\frac{2a}{a+b},\frac{2b}{a+b}$ 代替 a,b），原不等式化为

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n\geqslant n+1. \tag{1}$$

在 $a=b=1$ 时，(1) 显然成立. 设 $a>1>b$.(1) 等价于

$$a^{n+1}-b^{n+1}\geqslant(n+1)(a-b). \tag{2}$$

记 (2) 的左边为 $f(a)$，右边为 $g(a)(b=2-a)$。对 a 求导 $(b=2-a)$，由例 5

$$(n+1)(a^n+b^n)\geqslant(n+1)\cdot 2.$$

所以

$$f'(a)\geqslant g'(a).$$

而

$$f(1)=g(1).$$

所以 $f(a)\geqslant g(a)$，即原不等式成立.

练习 5.5. 由对称性, 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 当然 $a\geqslant 1$, 从而

$$b+c\leqslant 2, bc\leqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\leqslant 1.$$

固定 a, 考虑 b 的函数

$f(b)=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-b^2-c^2$，其中 $c=3-a-b$

$$f'(b)=-\frac{2}{b^3}+\frac{2}{c^3}-2b+2c=\frac{2(b-c)(b^2+bc+c^2-b^3c^3)}{b^3c^3}>0.$$

所以 $f(b)$ 递增, 于是

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-(a^2+b^2+c^2)\geqslant\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}-(a^2+c^2+c^2)=\frac{1}{a^2}+\frac{2}{c^2}-(a^2+2c^2)=$$

$g(a)$，其中 $a+2c=3$。$g'(a)=-\frac{2}{a^3}+\frac{4}{c^3}-2a+4c$。$g'(a)>0\Leftrightarrow a+\frac{1}{a^3}<2\left(c+\frac{1}{c^3}\right)\Leftarrow$

$$c^3\left(a+\frac{1}{a^3}\right)<2\Leftarrow c^3a<1\Leftarrow c^2a<1\Leftarrow c^2a<\left(\frac{c+c+a}{3}\right)^3=1.$$

因此，$g(a)$ 递增. $g(a)\geqslant g(1)=0.\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-(a^2+b^2+c^2)\geqslant 0.$

练习 5.6. 在 $a=b=\frac{3}{2}, c=0$ 时，欲证不等式的等号成立。固定 b，则 $c=3-b-a$。考虑函数 $f(a)=ab^2+bc^2+ca^2$。$f'(a)=b^2-2bc-a^2+2ac=(b-a)(a+b-2c)\leqslant 0$。所以 $f(a)$ 递减。可以使 a 减小至 b 或 c 增加至 $b(a+c$ 保持不变)，而 $f(a)$ 一直增加到 $b^3+bc^2+cb^2$ 或 $ab^2+b^3+ba^2$. 考虑函数 $\varphi(b)=b^3+bc^2+cb^2, c=3-2b$. $\varphi'(b)=3b^2+c^2-4bc+2bc-2b^2=(b-c)^2\geqslant 0$, 所以 $\varphi(b)$ 递增, $\varphi(b)\leqslant\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{27}{8}$. 因此所证不等式成立.

练习 5.7. 设 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{4x+1}, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. $f'(x)=\frac{1-4x}{2\sqrt{x}(4x+1)^2}$.

$f''(x)=\frac{-4\sqrt{x}(4x+1)-(1-4x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(4x+1)+8\sqrt{x}\right)}{2x(4x+1)^3}=\frac{24x(2x-1)-1}{4x\sqrt{x}(4x+1)^3}<0$. 所以 $f(x)$ 是凹函数.

$$\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1}\leqslant 3\times\frac{\sqrt{\frac{1}{6}}}{4\times\frac{1}{6}+1}=\frac{3\sqrt{6}}{10}.$$

即最大值为 $\frac{3\sqrt{6}}{10}$.

对于凹函数 $f(x), f'(x)$ 单调递减, 令 $t>0, F(t)=f(x_1-t)+f(x_2+t)-f(x_1)-f(x_2), x_1-t<x_1<x_2<x_2+t$，则 $F'(t)=f'(x_2+t)-f'(x_1-t)<0$. 所以 $F(t)$ 递减. $F(t)<F(0)=0$，即 $f(x_1)+f(x_2)\geqslant f(x_1-t)+f(x_2+t)$. 对本题的 $f(x), f(x)+f(y)+f(z)\geqslant f(0)+f(x+y)+f(z)\geqslant 2f(0)+f(x+y+z)=2f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$. 即所求最小值为 $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$. 或类似下题，$z\leqslant\frac{1}{4}$ 时 $g(x)$ 递减，可在 $x\leqslant\frac{1}{4}$ 时，将 x 调至 $\frac{1}{4}$，而在 $x\geqslant\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 递减，$f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$.

练习 5.8. 现在 $f(x)$ 不是凹函数. 不妨设 z 最小. 如果 $z\leqslant\frac{1}{4}$, 固定 y, 令 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1}, z=1-y-x$, 则 $g'(x)=\frac{1-4x}{\sqrt{x}(4x+1)^2}-\frac{1-4z}{\sqrt{z}(4z+1)^2}<0$. 所以 $g(x)$ 递减, 可将 x 调小, z 调大, 直至 $z=\frac{1}{4}$. 于是, 可设 $x\geqslant y\geqslant\frac{1}{4}, z\geqslant\frac{1}{4}$. 这时 $x\leqslant\frac{1}{2}$. 而 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上是凹函数, 所以仍在 $x=y=z$ 时, $\frac{\sqrt{x}}{4x+1}+\frac{\sqrt{y}}{4y+1}+\frac{\sqrt{z}}{4z+1}$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{3\sqrt{\frac{1}{3}}}{4\times\frac{1}{3}+1}=\frac{3\sqrt{3}}{7}$. 在 $x=1, y=z=0$ 时, 取得最小值 $\frac{1}{5}$ (在 $x\geqslant\frac{1}{4}$ 时, $f'(x)\leqslant 0, f(x)$ 递减, $f(x)\geqslant f(1)=\frac{1}{5}$).

练习 5.9. $\frac{1}{1+x^2}$ 不是凸函数, 不能直接用琴生不等式. 本题可建立一个不等式 $\frac{1}{1+x^2}\leqslant ax+b$，即 $(ax+b)(1+x^2)\geqslant 1(0\leqslant x\leqslant 1)$, 而且左边的函数在 $x=\frac{1}{3}$ 时, 正好为 1, 取最小值. 因此,

左边函数的导数在 $x=\frac{1}{3}$ 时为 0，即 $a\cdot\frac{10}{9}+2\cdot\frac{1}{3}\left(a\cdot\frac{1}{3}+b\right)=0$，又 $\left(a\cdot\frac{1}{3}+b\right)\cdot\frac{10}{9}=1$. 解得 $a=-\frac{27}{50}, b=\frac{27}{25}\cdot\sum\frac{1}{1+x^2}\leqslant\sum(ax+b)=a+3b=\frac{27}{10}$.

练习 5.10. 不妨设 a,b,c 中 a 最大. 先证不等式左边是 k 的增函数, 即导数 $\sum\frac{a^k\ln a}{a+b}\geqslant 0$. 由于 $x>0$ 时, $x^k\ln x\geqslant x^2\ln x$, 所以 $\sum\frac{a^k\ln a}{a+b}\geqslant\sum\frac{a^2\ln a}{a+b}$. 由于 $\frac{a^2}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{a+c}\Leftrightarrow a^3+a^2c\geqslant ac^2+bc^2=ac^2+\frac{c}{a}$, 所以 $\frac{a^2}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{a+c}$. 又 $b<1$ 时, $\frac{a^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}\Leftrightarrow a^2b+a^2c\geqslant ab^2+b^3$, 而 $a^2c=\frac{a}{b}\geqslant a>b^3$, 所以 $\frac{a^2}{a+b}\geqslant\frac{b^2}{b+c}$. 因此, $b<1$ 时, $\sum\frac{a^2\ln a}{a+b}\geqslant\frac{a^2}{a+b}\sum\ln a=0$. $b\geqslant 1$ 时, $\frac{b^2}{b+c}\geqslant\frac{c^2}{a+c}$, $\sum\frac{a^2\ln a}{a+b}\geqslant\frac{c^2}{a+b}\sum\ln a=0$. 于是, 只需证 $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geqslant\frac{3}{2}$. 这可由 $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}+\frac{1}{4}(a+b)+\frac{1}{4}(b+c)+\frac{1}{4}(c+a)\geqslant a+b+c$ 推出.

练习 5.11. 令 $p=\frac{b^2}{a^2}$, $q=\frac{c^2}{b^2}$, $r=\frac{a^2}{c^2}$, 则 p,q,r 为正实数, 且 $pqr=1$. 问题即求证:

在 $0<\lambda\leqslant\frac{5}{4}$ 时, $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda p}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda q}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda r}}\leqslant\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$；在 $\frac{5}{4}<\lambda$ 时, $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda p}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda q}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda r}}<2$. 不妨设 $p\geqslant q\geqslant r$，若 $q<\frac{2}{\lambda}$，固定 p，令 $f(q)=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda q}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda r}}$，其中 $r=\frac{1}{pq}$. $f'(q)<0\Leftrightarrow-\frac{1}{(1+\lambda q)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{q^2p(1+\lambda r)^{\frac{3}{2}}}<0\Leftrightarrow\frac{r^2}{(1+\lambda r)^3}<\frac{q^2}{(1+\lambda q)^3}\Leftarrow\left(\frac{x^2}{(1+\lambda x)^3}\right)'>0(x<\frac{2}{\lambda})\Leftrightarrow 2x(1+\lambda x)^3-3(1+\lambda x)^2\cdot\lambda x^2>0(x<\frac{2}{\lambda})$。最后的不等式即 $2>\lambda x$。于是可使 q 减少，r 增加，而 $f(q)$ 增加，直至

$q=r$。同样，若 $q\geqslant\frac{2}{\lambda}$，固定 $r,\varphi(q)=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda q}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda p}}(p=\frac{1}{rq})$ 递增，可使 $q=p$。因此只需考虑 $h(q)=\frac{2}{\sqrt{1+\lambda q}}+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda t}},t=\frac{1}{q^2}$。

$$\begin{aligned}h'(q)&=-\frac{\lambda}{(1+\lambda q)^{\frac{3}{2}}}+\frac{\lambda}{(1+\lambda t)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{q^3}\\&=-\frac{\lambda((1+\lambda q)+\sqrt{(1+\lambda q)(q^2+\lambda)}+(q^2+\lambda))}{(1+\lambda q)^{\frac{3}{2}}(q^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{q^2-\lambda q+(\lambda-1)}{(1+\lambda q)^{\frac{1}{2}}+(q^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

$$q^2-\lambda q+(\lambda-1)=(q-1)(q+1-\lambda).$$

在 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，$h'(q)$ 仅有一个零点 $q=1$。在 q 由 0 增至 1 时，$h'(q)>0,h(q)$ 由 2 递增至 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$。在 q 由 1 增至 $+\infty$ 时，$h'(q)<0,h(q)$ 由 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$ 递减至 1。

在 $1<\lambda<2$ 时，$h'(q)$ 有两个零点 $\lambda-1$ 及 $1,\lambda-1<1$. 在 q 由 0 增至 $\lambda-1$ 时，$h'(q)<0$，$h(q)$ 由 2 递减至 $\frac{2}{\sqrt{1+\lambda(\lambda-1)}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\lambda}{(\lambda-1)^2}}}=\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$，这是 $h(q)$ 的极小值. 在 q 由 $\lambda-1$ 增至 1 时，$h'(q)>0$，$h(q)$ 由 $\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$ 增至 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$，这是 $h(q)$ 的极大值. 在 q 由 1 增至 $+\infty$ 时，$h'(q)<0$，$h(q)$ 由 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$ 递减至 1.

在 $2<\lambda$ 时，$h'(q)$ 有两个零点 1 及 $\lambda-1,1<\lambda-1$. 在 q 由 0 增至 1 时，$h'(q)<0,h(q)$ 由 2 递减至 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$. 在 q 由 1 增至 $\lambda-1$ 时，$h'(q)>0,h(q)$ 由 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}$ 增至 $\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$，这是 $h(q)$ 的极大值（但不是最大值，因为 $\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}<2$）. q 由 $\lambda-1$ 趋向于 $+\infty$ 时，$h'(q)<0,h(q)$ 由 $\frac{\lambda+1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$ 递减至 1. 在 $\lambda=2$ 时，$h'(q)$ 仅有一个零点 1，所以 $h(q)$ 递减.

综合以上所述，在 $0<\lambda\leqslant\frac{5}{4}$ 时，$h(q)$ 的最大值为 $\frac{3}{\sqrt{1+\lambda}}(\geqslant 2)$. 在 $\frac{5}{4}<\lambda$ 时，$h(q)<2$，即所欲证的结论成立.