

一道取整递推与 Calkin-Wilf 序列

LeyuDame

2026 年 8 月 5 日

摘要

本文讨论递推数列

$$a_{n+1} = \frac{1}{[a_n] - \{a_n\}} + 1, \quad a_1 = 1$$

的求值与通项表示。关键想法是先令 $b_n = a_n - 1$ ，把原递推化为

$$b_{n+1} = \frac{1}{2[b_n] + 1 - b_n}.$$

这个递推正是 Calkin-Wilf 序列的后继公式。因此 a_{2026} 可以通过二进制路径快速计算，通项也可以借助 Stern 双原子数列写出。

1 问题背景

题目要求计算 a_{2026} ，其中

$$a_{n+1} = \frac{1}{[a_n] - \{a_n\}} + 1, \quad a_1 = 1.$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分， $\{x\}$ 表示 x 的小数部分。

这类递推的难点在于取整与小数部分同时出现。若直接从 a_n 出发，式子看起来不容易迭代；但递推右端有一个额外的 $+1$ ，这提示我们把数列整体平移一位。平移之后，取整与小数部分会合并成一个只含 $[b_n]$ 与 b_n 的表达式。

2 从原递推到 Calkin-Wilf 后继公式

令

$$b_n = a_n - 1.$$

因为 $a_1 = 1$ ，所以

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

又由 $a_n = b_n + 1$ ，可得

$$\begin{aligned} [a_n] - \{a_n\} &= [b_n + 1] - \{b_n + 1\} \\ &= [b_n] + 1 - \{b_n\} \\ &= [b_n] + 1 - (b_n - [b_n]) \\ &= 2[b_n] + 1 - b_n. \end{aligned}$$

于是对 $n \geq 1$ ，有

$$b_{n+1} = \frac{1}{2[b_n] + 1 - b_n}.$$

从 $b_2 = 1$ 开始，前几项为

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 3, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{2}, \dots$$

这正是 Calkin-Wilf 序列。

命题 1. 设 $c_1, c_2, c_3, \dots$ 为 Calkin-Wilf 序列, 即

$$c_1 = 1, \quad c_{m+1} = \frac{1}{2[c_m] + 1 - c_m}.$$

则对 $n \geq 2$, 有

$$b_n = c_{n-1}, \quad a_n = 1 + c_{n-1}.$$

证明. 由上面的变形可知, b_n 从 $b_2 = 1$ 开始满足与 c_m 相同的递推公式。也就是说

$$b_2 = c_1, \quad b_3 = c_2, \quad b_4 = c_3, \quad \dots$$

因此一般地 $b_n = c_{n-1}$, 从而 $a_n = 1 + c_{n-1}$ 。

3 用二进制路径计算第 2025 项

Calkin-Wilf 树从根节点 $\frac{1}{1}$ 出发。若当前节点为 $\frac{p}{q}$, 则左、右儿子分别为

$$L: \frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{p+q}, \quad R: \frac{p}{q} \mapsto \frac{p+q}{q}.$$

Calkin-Wilf 序列按层从左到右读取这棵树。若要找第 m 项, 可以把 m 写成二进制, 去掉最高位的 1, 然后把剩余二进制位解释为路径:

$$0 \leftrightarrow L, \quad 1 \leftrightarrow R.$$

本题中

$$a_{2026} = 1 + b_{2026},$$

而 b_{2026} 是 Calkin-Wilf 序列的第 2025 项。由于

$$2025 = (11111101001)_2,$$

去掉最高位 1 后, 路径为

$$1111101001,$$

也就是

$$R, R, R, R, R, L, R, L, L, R.$$

从 $\frac{1}{1}$ 出发逐步计算:

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \xrightarrow{R} & \frac{2}{1} & \xrightarrow{R} & \frac{3}{1} & \xrightarrow{R} & \frac{4}{1} & \xrightarrow{R} & \frac{5}{1} & \xrightarrow{R} & \frac{6}{1} \\ & & \xrightarrow{L} & \frac{6}{7} & \xrightarrow{R} & \frac{13}{7} & \xrightarrow{L} & \frac{13}{20} & \xrightarrow{L} & \frac{13}{33} & \xrightarrow{R} & \frac{46}{33}. \end{array}$$

所以

$$b_{2026} = \frac{46}{33}.$$

因此

$$a_{2026} = 1 + b_{2026} = 1 + \frac{46}{33} = \frac{79}{33}.$$

4 通项: 用 Stern 双原子数列表示

若想写出较自然的通项, 可以引入 Stern 双原子数列 s_n :

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 1,$$

$$s_{2m} = s_m, \quad s_{2m+1} = s_m + s_{m+1}.$$

它与 Calkin-Wilf 序列的关系是

$$c_m = \frac{s_m}{s_{m+1}}.$$

结合 $b_n = c_{n-1}$, 得到对 $n \geq 2$,

$$a_n = 1 + \frac{s_{n-1}}{s_n}.$$

注. 这里的“通项”不同于等差、等比数列中的闭式公式。它依赖递归定义的 Stern 数列, 或者等价地依赖 $n-1$ 的二进制路径。对于这类遍历所有正有理数的数列, 这种二进制路径形式往往比强行寻找初等闭式更自然。

5 方法小结

本题的关键有三步。

第一, 看到递推式末尾的 $+1$, 先作平移 $b_n = a_n - 1$ 。这一步把原式中的 $[a_n]$ 和 $\{a_n\}$ 化成

$$2[b_n] + 1 - b_n.$$

第二, 识别递推

$$x \mapsto \frac{1}{2[x] + 1 - x}$$

是 Calkin-Wilf 序列的后继公式。因此原数列并不是孤立递推, 而是从 Calkin-Wilf 序列平移得到的。

第三, 计算远处项时不用逐项迭代, 而是把下标写成二进制, 用 0 与 1 表示 Calkin-Wilf 树中的左右路径。对于本题, 这给出

$$a_{2026} = \frac{79}{33}.$$

参考资料

1. Neil J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Stern's diatomic series, A002487.
2. Herbert S. Wilf, Calkin-Wilf tree and enumeration of positive rational numbers, related expository notes.
3. N. Calkin and H. S. Wilf, Recounting the rationals, American Mathematical Monthly, 2000.