注释 1.38 与 1.55：韦达跳跃题型与卡特兰数

LeyuDame

2026 年 11 月 3 日

摘要

本文把《整除》第一章中的注释 1.38 和注释 1.55 单独整理为一份小讲义。注释 1.38 的核心是同一类二次方程整除题：把一个变量视为未知量，用韦达关系构造另一个正整数解，再由最小性推出矛盾或分类。注释 1.55 则从整除结论 $(n+1) \mid \binom{2n}{n}$ 进入卡特兰数，解释其显式公式、卷积递推和凸多边形三角剖分模型。

1　注释 1.38：同型题背后的韦达跳跃

1.1　原注释内容

下面这些题目都可以用与前文例题相同的解题过程处理。

(a) 设正整数 a, b 满足 $ab \mid a^2+b^2+1$。证明：

$$a^2+b^2+1 = 3ab.$$

(b) 设正整数 a, b 满足 a^2+b^2 被 $ab-1$ 整除。证明：

$$a^2+b^2 = 5ab-1.$$

(c)（AMM11374）设 a, b, c, d 是正整数，满足

$$abcd = a^2+b^2+c^2+1.$$

证明：$d = 4$。

(d)（USATST2002）求所有有序正整数对 (m, n)，满足 $mn-1 \mid m^2+n^2$。

(e)（USATST2009）求所有正整数对 (m, n)，满足

$$mn-1 \mid (n^2-n+1)^2.$$

(f)（Hurwitz）证明：当 $k > n$ 时，方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = kx_1x_2\cdots x_n$$

没有正整数解。

1.2　共同结构：把整除题变成二次方程

这类题的第一步通常不是估计，而是把整除条件写成等式。例如在 (a) 中，

$$a^2+b^2+1 = qab.$$

若固定 b，把 a 看成未知量 x，得到二次方程

$$x^2 - qbx + (b^2+1) = 0.$$

一个根是 $x = a$，另一个根为

$$a' = qb - a = \frac{b^2+1}{a}.$$

若能证明 a' 仍是正整数，并且 $0 < a' < a$，就得到一个比原解更小的正整数解。这与“选取最小反例”矛盾，于是逼出特殊情形。

方法提炼. 处理注释 *1.38* 这类题，可以按下面的顺序推进：

1. 把整除条件写成等式，引入商 q 或参数 c。
2. 固定除一个变量以外的所有变量，把等式看成关于该变量的二次方程。
3. 用韦达定理写出另一根，并证明另一根是正整数。
4. 选择某个最小量，例如 $a+b$ 或 $x_1 + \cdots + x_n$，说明另一根会给出更小解。
5. 由最小性矛盾排除非目标情形，或把问题降到边界情形。

这个方法的关键不是“凭空找出”另一个解，而是把原条件保留下来。另一根来自同一个二次方程，因此它自动满足同一个等式；只要正性和更小性成立，就能构成下降。

1.3 各题的切入点

(a) 商必须等于 3. 设 $a \geq b$，并取 $a+b$ 最小的反例。由

$$a^2 + b^2 + 1 = qab$$

得到另一根 $a' = qb - a = (b^2+1)/a$。若 $a' > 0$，则 (a', b) 也是同一商 q 的解。最小性要求 $a' \geq a$，而估计常会推出 $a' < a$，矛盾。剩下的边界情况会迫使 $q = 3$。本题是 Markov 型韦达跳跃的入门版本。

(b) 商必须等于 5. 设

$$a^2 + b^2 = q(ab - 1).$$

固定 b 得

$$x^2 - qbx + (b^2 + q) = 0,$$

另一根为

$$a' = qb - a = \frac{b^2+q}{a}.$$

与 (a) 相比，常数项多了 q，所以需要先从等式中得到对 q 的粗估，再做下降。目标式 $a^2 + b^2 = 5ab - 1$ 等价于 $q = 5$。

(c) 三变量版本的下降. 方程

$$abcd = a^2 + b^2 + c^2 + 1$$

若固定 b, c, d，把它看成关于 a 的二次方程：

$$x^2 - bcd\,x + (b^2 + c^2 + 1) = 0.$$

另一根为

$$a' = bcd - a = \frac{b^2+c^2+1}{a}.$$

方法仍然是选取最小的 $a+b+c$ 或最大变量下降。由于 d 在乘积项中起系数作用，下降会把可能的 d 压到唯一值 4。

(d) 分类问题要保留“有序”信息. 这题与 (b) 的整除条件相同，但要求所有有序正整数对。写成

$$m^2+n^2=q(mn-1)$$

后，韦达跳跃把 (m,n) 与 $(qn-m,n)$ 联系起来。分类时不能只证明商为 5，还要追踪下降链的终点和反向生成过程。终点通常来自小变量取 1 的边界。

(e) 右端换成平方后的变形. 条件为

$$mn-1\mid(n^2-n+1)^2.$$

由于表达式只显含 n，直接对 m 做二次化并不对称。常见处理是先由同余关系把 m 和 n 的大小锁住，再构造保持整除关系的跳跃。它仍然属于“同余整除 $\to$ 二次根变换 $\to$ 下降”的范畴，但比 (a)(b) 更依赖预处理。

(f) Hurwitz 方程的多变量下降. 若存在正整数解，取和 $S=x_1+\cdots+x_n$ 最小的解，并令 x_n 为最大变量。固定 $x_1,\dots,x_{n-1}$，得到关于 x_n 的二次方程：

$$X^2-kx_1x_2\cdots x_{n-1}X+(x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2)=0.$$

另一根

$$X'=kx_1x_2\cdots x_{n-1}-x_n$$

仍为整数根。接下来要证明 $0<X'<x_n$，这会产生更小的正整数解，和最小性矛盾。条件 $k>n$ 正是保证估计方向足够强的地方。

2 注释 1.55：从整除到卡特兰数

2.1 原注释内容

由例 1.54 可知，对所有正整数 n，

$$n+1\mid\binom{2n}{n}.$$

于是

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

是整数，称为第 n 个卡特兰数。前几项是

$$1,1,2,5,14,42,132,429,\dots$$

其中 $C_0=1$。卡特兰数满足重要递推

$$C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}C_kC_{n-k}.$$

它也有许多组合理解：例如 C_n 是凸 $n+2$ 边形用互不相交的对角线剖分成 n 个三角形的方法数。

2.2 为什么定义给出整数

例 1.54 给出的证明很短。利用恒等式

$$(n+1)\binom{2n+1}{n}=(2n+1)\binom{2n}{n}.$$

对模 $n+1$ 取同余时，右边系数 $2n+1=2(n+1)-1$，所以

$$(2n+1)\binom{2n}{n}\equiv-\binom{2n}{n}\pmod{n+1}.$$

左边显然被 $n+1$ 整除，因此 $\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{n+1}$。这说明 C_n 的定义不是分数，而是整数序列。

另一个常用形式是

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}.$$

因为

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n},$$

两式相减正好得到

$$\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

这个形式更有组合味道：它把“全部对象”减去“坏对象”，最后剩下合法对象。

2.3 三角剖分给出卷积递推

考虑一个凸 $n+3$ 边形，固定其中一条边 e。任取一种三角剖分，边 e 所在的三角形会把整个多边形切成左右两个较小的凸多边形。若这两个小部分分别对应参数 k 和 $n-k$，那么它们的剖分数分别是 C_k 和 C_{n-k}。把所有可能的 k 相加，就得到

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

这个递推的教学意义很强：凡是一个对象能按“根部结构”分裂成左、右两个独立对象，计数上往往就会出现卡特兰卷积。括号匹配、二叉树、Dyck 路径、栈排序排列等模型都能看到同样结构。

2.4 用生成函数推出显式公式

设

$$C(x) = \sum_{n \geq 0} C_n x^n.$$

由 $C_0 = 1$ 和递推

$$C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

可得

$$\frac{C(x) - 1}{x} = C(x)^2.$$

即

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0.$$

把它看成关于 $C(x)$ 的二次方程，解得

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

由于 $C(x)$ 在 $x = 0$ 处应从常数项 1 开始，必须取负号：

$$C(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

展开 $\sqrt{1-4x}$ 后即可得到

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

这说明卡特兰数有两个互相支撑的来源：一方面，组合分解自然给出卷积递推；另一方面，递推的生成函数解回到中央二项式系数。

2.5 几个常见模型

模型	C_n 计数的对象
凸多边形三角剖分	凸 $n+2$ 边形的三角剖分数
括号匹配	n 对括号的合法匹配方式
Dyck 路径	从 $(0,0)$ 到 (n,n) 且不越过对角线的格路径
满二叉树	有 n 个内部结点的满二叉树
二元运算加括号	$n+1$ 个因子的完全加括号方式

这些模型之间并不是偶然同数。它们都可以被拆成“左对象 + 右对象”的结构，或者可以彼此建立双射。例如括号匹配中的第一对外层括号包住一段合法表达式，外面还剩一段合法表达式，正好对应

$$C_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}.$$

3 方法小结

注释 1.38 和注释 1.55 看似分属不同主题：前者是整除方程，后者是组合计数。但它们都体现了一个竞赛数学中的常见思路：不要只看公式本身，要寻找公式背后的结构。

对注释 1.38，结构是“同一方程的另一根”，所以关键词是韦达跳跃、最小反例和下降。对注释 1.55，结构是“对象的根部分裂”，所以关键词是卡特兰递推、生成函数和双射。学生下一次遇到类似题目时，可以先问两个问题：是否能把条件改写成二次方程？是否能把计数对象拆成左右两个独立部分？

参考资料

1. Richard P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015；Cambridge excerpt: https://assets.cambridge.org/97811070/75092/excerpt/9781107075092_excerpt.pdf.
2. Richard P. Stanley, *Catalan Addendum*, version of 25 May 2013, MIT: https://math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf.
3. Wikipedia contributors, “Catalan number”, *Wikipedia*: https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number.
4. 原始整理来源：*titu* 数论，第一章《整除》，注释 1.38 与注释 1.55。