从交点个数看相切参数：指数函数与对数函数的一个例子

LeyuDame

2026 年 11 月 3 日

摘要

本文整理一道关于指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 的相切与交点个数问题。常规解法往往先列切线条件，再进行较长的代数消元；本文采用更自然的参数观点：先研究交点方程的零点个数，再把相切看成零点个数变化的临界状态。核心换元是 $u=-\ln a$，它把问题转化为函数 $\Phi_u(x)=\ln x+ue^{-ux}$ 的零点结构分析。

1 问题背景

本讲义讨论下面题目的第 2、3 问。

题目 1. 若两个函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处有相同的切线, 则称这两个函数相切, 切点为 $(x_0,f(x_0))$。

(2) 若 $0<a<1$，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 相切，求实数 a 的值；

(3) 设第 (2) 问的结果为 a_0，求证：当 $0<a<a_0$ 时，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 的图象有三个公共点。

这道题容易让人先从“相切”入手：列出函数值相等和导数相等两个方程，然后消元。这样当然可以做，但计算过程偏技术化，而且第 3 问还要重新证明交点个数。

更顺的思路是先看第 3 问：图象有几个公共点，本质上是一个含参数方程有几个正根。第 2 问中的“相切”正是交点个数发生变化时的临界情形。也就是说，第 2 问应当从第 3 问的边界中长出来。

2 统一换元：把交点问题变成零点问题

因为 $0<a<1$，令

$$u=-\ln a>0,\qquad a=e^{-u}.$$

则

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=-\frac{\ln x}{u}.$$

两条曲线的交点满足

$$e^{-ux}=-\frac{\ln x}{u},$$

即

$$\Phi_u(x):=\ln x+ue^{-ux}=0,\qquad x>0.$$

于是，研究 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 的公共点个数，等价于研究 $\Phi_u(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点个数。

注 1. 这个换元的作用有两点。第一，它把底数 a 的限制 $0<a<1$ 变成了更干净的参数 $u>0$。第二，它把指数函数和对数函数的交点转化为一个单函数的零点问题，后面只需要做导数和单调性分析。

3 核心技巧：先分析临界点

若要判断 $\Phi_u(x)$ 的零点个数，关键是先知道它的极值位置。求导得

$$\Phi_u'(x) = \frac{1}{x} - u^2 e^{-ux}.$$

令

$$s = ux,$$

则

$$\begin{aligned}\Phi_u'(x) = 0 &\iff u^2 x e^{-ux} = 1 \\ &\iff (ux)e^{-ux} = \frac{1}{u} \\ &\iff s e^{-s} = \frac{1}{u}.\end{aligned}$$

这一步是整道题的分界点。函数

$$q(s) = s e^{-s} \qquad (s > 0)$$

在 $s = 1$ 处取得最大值 $1/e$。因此：

- 当 $u < e$ 时，方程 $s e^{-s} = 1/u$ 无解，Φ_u 没有临界点；
- 当 $u = e$ 时，方程只有一个解 $s = 1$，这是临界边界；
- 当 $u > e$ 时，方程有两个解 $0 < s_1 < 1 < s_2$，从而 Φ_u 有两个临界点

$$x_1 = \frac{s_1}{u}, \qquad x_2 = \frac{s_2}{u}.$$

接下来还要知道这两个临界点的函数值一正一负。这个判断如果直接代 x_1, x_2 会很乱，正确做法是继续用 $s = ux$。

假设 $s = ux$ 且 $s e^{-s} = 1/u$。则

$$u e^{-s} = \frac{1}{s},$$

并且由 $u = s^{-1} e^{s}$ 得

$$\ln u = s - \ln s.$$

于是临界点处

$$\begin{aligned}\Phi_u(x) &= \ln \frac{s}{u} + u e^{-s} \\ &= \ln s - \ln u + \frac{1}{s} \\ &= 2\ln s + \frac{1}{s} - s.\end{aligned}$$

记

$$H(s) = 2\ln s + \frac{1}{s} - s.$$

则

$$H'(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - 1 = -\frac{(s-1)^2}{s^2} \le 0,$$

且 $H(1) = 0$。所以

$$s < 1 \Rightarrow H(s) > 0, \qquad s > 1 \Rightarrow H(s) < 0.$$

这说明：当 $u > e$ 时，Φ_u 的第一个极值为正，第二个极值为负。

4 第 2 问：相切是临界情形

若两条曲线相切，则对应的零点不是普通零点，而是一个重根。换成 Φ_u 的语言，就是存在 $x_0 > 0$，使得

$$\Phi_u(x_0) = 0, \qquad \Phi_u'(x_0) = 0.$$

令 $s = ux_0$。由 $\Phi_u'(x_0) = 0$ 得

$$se^{-s} = \frac{1}{u}.$$

由上一节的计算，临界点处的函数值为

$$\Phi_u(x_0) = H(s).$$

相切还要求 $\Phi_u(x_0) = 0$，所以

$$H(s) = 0.$$

但 $H(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调不增，且唯一零点为 $s = 1$。因此

$$s = 1.$$

代回

$$se^{-s} = \frac{1}{u}$$

得到

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{u},$$

即

$$u = e.$$

因为 $u = -\ln a$，所以

$$-\ln a = e,$$

从而

$$a = e^{-e}.$$

此时切点也可以顺便求出：

$$x_0 = \frac{s}{u} = \frac{1}{e}.$$

并且

$$a^{x_0} = e^{-e\cdot 1/e} = \frac{1}{e}, \qquad \log_a x_0 = \frac{\ln(1/e)}{-e} = \frac{1}{e},$$

所以确实相切。

5 第 3 问：边界之后出现三个交点

由第 2 问可知

$$a_0 = e^{-e}.$$

当 $0 < a < a_0$ 时，写成 $a = e^{-u}$，则

$$e^{-u} < e^{-e},$$

所以

$$u > e.$$

此时方程

$$se^{-s} = \frac{1}{u}$$

有两个解

$$0 < s_1 < 1 < s_2,$$

对应 Φ_u 的两个临界点

$$x_1 = \frac{s_1}{u}, \qquad x_2 = \frac{s_2}{u}.$$

由

$$\Phi_u'(x) = \frac{1}{x}\big(1 - u(ux)e^{-ux}\big)$$

可知 Φ_u 的单调性为

$$\text{增}(0, x_1), \qquad \text{减}(x_1, x_2), \qquad \text{增}(x_2, +\infty).$$

又因为

$$\Phi_u(x_1) = H(s_1) > 0, \qquad \Phi_u(x_2) = H(s_2) < 0,$$

并且

$$\lim_{x\to 0^+} \Phi_u(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \Phi_u(x) = +\infty.$$

于是：

1. 在 $(0, x_1)$ 上，$\Phi_u(x)$ 从 $-\infty$ 单调增到正数，所以有且只有一个零点；
2. 在 (x_1, x_2) 上，$\Phi_u(x)$ 从正数单调减到负数，所以有且只有一个零点；
3. 在 $(x_2, +\infty)$ 上，$\Phi_u(x)$ 从负数单调增到 $+\infty$，所以有且只有一个零点。

因此 $\Phi_u(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有三个零点。回到原问题，这说明当

$$0 < a < a_0 = e^{-e}$$

时，指数函数 $y = a^x$ 与对数函数 $y = \log_a x$ 的图象有三个公共点。

6 方法小结

这道题的关键不是直接消元求切线，而是把相切放进交点个数的整体变化中看。

- 看到 $0 < a < 1$ 的指数、对数同底问题，可以先令 $u = -\ln a$，把底数参数变成正参数。
- 研究交点个数时，优先把方程化成单函数零点问题，再分析导数和极值。
- 相切通常对应零点的临界状态，也就是同时满足 $F(x) = 0$ 与 $F'(x) = 0$。
- 本题真正控制参数分界的是 se^{-s} 的最大值 $1/e$，因此 $u = e$，也就是 $a = e^{-e}$。

以后遇到“先求相切参数，再讨论参数变化后的交点个数”的题，可以先反过来想：先研究零点个数的参数分界，再把相切作为边界情形读出来。