取整递推与 Calkin-Wilf 序列

LeyuDame

2026 年 11 月 3 日

摘要

本文讨论递推数列

$$a_{n+1}=\frac{1}{[a_n]-\{a_n\}}+1,\qquad a_1=1$$

的求值与通项表示。关键想法是先令 $b_n=a_n-1$，把原递推化为

$$b_{n+1}=\frac{1}{2[b_n]+1-b_n}.$$

这个递推正是 Calkin-Wilf 序列的后继公式。因此 a_{2026} 可以通过二进制路径快速计算，通项也可以借助 Stern 双原子数列写出。

1 问题背景

题目要求计算 a_{2026}，其中

$$a_{n+1}=\frac{1}{[a_n]-\{a_n\}}+1,\qquad a_1=1.$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分，$\{x\}$ 表示 x 的小数部分。

这类递推的难点在于取整与小数部分同时出现。若直接从 a_n 出发，式子看起来不容易迭代；但递推右端有一个额外的 $+1$，这提示我们把数列整体平移一位。平移之后，取整与小数部分会合并成一个只含 $[b_n]$ 与 b_n 的表达式。

2 从原递推到 Calkin-Wilf 后继公式

令

$$b_n=a_n-1.$$

因为 $a_1=1$，所以

$$b_1=0,\qquad b_2=1.$$

又由 $a_n=b_n+1$，可得

$$\begin{aligned}[a_n]-\{a_n\}&=[b_n+1]-\{b_n+1\}\\&=[b_n]+1-\{b_n\}\\&=[b_n]+1-(b_n-[b_n])\\&=2[b_n]+1-b_n.\end{aligned}$$

于是对 $n\ge 1$，有

$$b_{n+1}=\frac{1}{2[b_n]+1-b_n}.$$

从 $b_2=1$ 开始，前几项为

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad 2,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{2}{3},\quad 3,\quad \frac{1}{4},\quad \frac{4}{3},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{5}{2},\dots$$

这正是 Calkin-Wilf 序列。

命题 1. 设 $c_1, c_2, c_3, \dots$ 为 Calkin-Wilf 序列，即

$$c_1 = 1, \qquad c_{m+1} = \frac{1}{2\lfloor c_m \rfloor + 1 - c_m}.$$

则对 $n \geq 2$，有

$$b_n = c_{n-1}, \qquad a_n = 1 + c_{n-1}.$$

证明. 由上面的变形可知，b_n 从 $b_2 = 1$ 开始满足与 c_m 相同的递推公式。也就是说

$$b_2 = c_1, \quad b_3 = c_2, \quad b_4 = c_3, \quad \dots$$

因此一般地 $b_n = c_{n-1}$，从而 $a_n = 1 + c_{n-1}$。

3 用二进制路径计算第 2025 项

Calkin-Wilf 树从根节点 $\frac{1}{1}$ 出发。若当前节点为 $\frac{p}{q}$，则左、右儿子分别为

$$L : \frac{p}{q} \mapsto \frac{p}{p+q}, \qquad R : \frac{p}{q} \mapsto \frac{p+q}{q}.$$

Calkin-Wilf 序列按层从左到右读取这棵树。若要找第 m 项，可以把 m 写成二进制，去掉最高位的 1，然后把剩余二进制位解释为路径：

$$0 \leftrightarrow L, \qquad 1 \leftrightarrow R.$$

本题中

$$a_{2026} = 1 + b_{2026},$$

而 b_{2026} 是 Calkin-Wilf 序列的第 2025 项。由于

$$2025 = (11111101001)_2,$$

去掉最高位 1 后，路径为

$$1111101001,$$

也就是

$$R, R, R, R, R, L, R, L, L, R.$$

从 $\frac{1}{1}$ 出发逐步计算：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1} \xrightarrow{R} \frac{2}{1} \xrightarrow{R} \frac{3}{1} \xrightarrow{R} \frac{4}{1} \xrightarrow{R} \frac{5}{1} \xrightarrow{R} \frac{6}{1} \\ &\xrightarrow{L} \frac{6}{7} \xrightarrow{R} \frac{13}{7} \xrightarrow{L} \frac{13}{20} \xrightarrow{L} \frac{13}{33} \xrightarrow{R} \frac{46}{33}. \end{aligned}$$

所以

$$b_{2026} = \frac{46}{33}.$$

因此

$$a_{2026} = 1 + b_{2026} = 1 + \frac{46}{33} = \frac{79}{33}.$$

4 通项：用 Stern 双原子数列表示

若想写出较自然的通项，可以引入 Stern 双原子数列 s_n：

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = 1,$$

$$s_{2m} = s_m, \qquad s_{2m+1} = s_m + s_{m+1}.$$

它与 Calkin-Wilf 序列的关系是

$$c_m = \frac{s_m}{s_{m+1}}.$$

结合 $b_n = c_{n-1}$，得到对 $n \geq 2$,

$$a_n = 1 + \frac{s_{n-1}}{s_n}.$$

注. 这里的“通项”不同于等差、等比数列中的闭式公式。它依赖递归定义的 Stern 数列，或者等价地依赖 $n-1$ 的二进制路径。对于这类遍历所有正有理数的数列，这种二进制路径形式往往比强行寻找初等闭式更自然。

5 方法小结

本题的关键有三步。

第一，看到递推式末尾的 $+1$，先作平移 $b_n = a_n - 1$。这一步把原式中的 $[a_n]$ 和 $\{a_n\}$ 化成

$$2[b_n] + 1 - b_n.$$

第二，识别递推

$$x \mapsto \frac{1}{2[x] + 1 - x}$$

是 Calkin-Wilf 序列的后继公式。因此原数列并不是孤立递推，而是从 Calkin-Wilf 序列平移得到的。

第三，计算远处项时不用逐项迭代，而是把下标写成二进制，用 0 与 1 表示 Calkin-Wilf 树中的左右路径。对于本题，这给出

$$a_{2026} = \frac{79}{33}.$$

参考资料

1. Neil J. A. Sloane, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Stern’s diatomic series, A002487.
2. Herbert S. Wilf, Calkin-Wilf tree and enumeration of positive rational numbers, related expository notes.
3. N. Calkin and H. S. Wilf, Recounting the rationals, American Mathematical Monthly, 2000.