

2026 广东预赛
参考答案与评分标准

1 填空题 (每小题 8 分, 共 80 分)

1. 设

$$S = \{a : a^2 < 2026\}, \quad T = \{a : \text{关于 } x \text{ 的一元二次方程 } x^2 - 4x + a = 0 \text{ 有整数根}\}.$$

则 $S \cap T$ 的元素个数为_____.

答案: 8.

解: 显然 T 的元素都是整数, 而 S 中的整数元素仅有 $-45, -44, \dots, 45$, 故只需考虑这些数中有哪些满足 T 的条件.

设 $x^2 - 4x + a = 0$ 的一个整数根是 x_0 , 则

$$a = 4x_0 - x_0^2 = 4 - (2 - x_0)^2,$$

故 a 形如 $4 - d^2$, 这里 d 是整数, 不妨设 d 非负. 由 $-45 \leq 4 - d^2 \leq 45$ 知 $0 \leq d \leq 7$, 故共有 8 个 d , 因此共有 8 个 a .

2. 已知

$$\log_2 x = \log_3 y = \log_5 \sqrt{x^2 + y^2},$$

则 $xy =$ _____.

答案: $\sqrt{6}$.

解: 设 $\log_2 x = a$, 则 $x = 2^a, y = 3^a, \sqrt{x^2 + y^2} = 5^a$, 故

$$2^{2a} + 3^{2a} = 5^{2a},$$

因此

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2a} + \left(\frac{3}{5}\right)^{2a} = 1.$$

由 $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + \left(\frac{3}{5}\right)^t$ 关于 t 单调递减及 $f(1) = 1$ 知 $2a = 1$. 故 $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$, 因此 $xy = \sqrt{6}$.

3. 有 24 名小朋友排成一圈, 现在要将小朋友们两两配对, 一共配成 12 对, 并要求任意两名配对的小朋友之间恰好隔了 3 名小朋友, 则共有_____种配对的方法.

答案: 16

解: 将小朋友们顺次编号为 $1, 2, \dots, 24$, 则配对的小朋友编号之差为 4 (模 24 意义下), 将编号按照除以 4 的余数分组, 每一组 (例如, $1, 5, 9, 13, 17, 21$ 号小朋友) 只能在他们内部配对, 共有 2 种配对方式

$$1 - 5, 9 - 13, 17 - 21 \quad \text{或} \quad 1 - 21, 5 - 9, 13 - 17,$$

故配对的方法共有 $2^4 = 16$ 种.

4. 在平面直角坐标系中, 点 $A(-3, 0), B(3, 0)$, 动点 M 满足 $|MA| \cdot |MB| = 6$, 则 M 的纵坐标的最大值为_____.

答案: 1.

解: 设 $M(x, y)$, 由条件得

$$((x-3)^2 + y^2)((x+3)^2 + y^2) = 36,$$

整理得

$$y^4 + (2x^2 + 18)y^2 + (x^4 - 18x^2 + 45) = 0,$$

故

$$(x^2 + y^2)^2 + 18(y^2 - x^2) + 45 = 0.$$

设 $x^2 + y^2 = t$, 则

$$y^2 - x^2 = -\frac{t^2 + 45}{18},$$

故

$$y^2 = \frac{-t^2 + 18t - 45}{36} = 1 - \frac{(t-9)^2}{36} \leq 1.$$

因此 $y \leq 1$. 取等时 $t = 9, x^2 = 8$, 即 $M(2\sqrt{2}, 1)$ 或 $M(-2\sqrt{2}, 1)$.

5. 若存在 $n+1$ 个实数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ 同时满足

$$(1) \quad a_0 = -2026a_1;$$

$$(2) \quad \text{对 } k = 1, 2, \dots, n-1, \text{ 有 } a_{k+1} = \frac{a_k^2}{2a_k + a_{k-1}}.$$

则正整数 n 的最大值是_____.

答案: 1013.

解: 由 (2) 得

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_{k-1}}{a_k} + 2.$$

设 $b_k = \frac{a_{k-1}}{a_k}$, 则 $\{b_k\}$ 是以 -2026 为首项, 2 为公差的等差数列. 如果 $n \geq 1014$, 那么 $b_{1014} = 0$, 故 $a_{1013} = 0$, 结合前面条件知

$$a_{1012} = a_{1011} = \cdots = a_0 = 0,$$

但 $2a_1 + a_0 = 0$ 不能作分母, 与条件矛盾. 另一方面, 令

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2026}a_0, \quad a_2 = -\frac{1}{2024}a_1, \quad \dots, \quad a_{1013} = -\frac{1}{2}a_{1012},$$

符合题目条件. 因此 n 的最大值是 1013.

6. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 2$. 将 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起后形成三棱锥 $D-ABC$. 当三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大时, 直线 AC, BD 所成角的余弦值为_____.

答案: $\frac{5}{97}\sqrt{97}$.

解: 三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大时, 点 D 到面 ABC 的距离最大, 故点 D 到面 ABC 的垂足在直线 AC 上, 即面 ADC 与面 ABC 垂直. 如下图建立空间直角坐标系, 由勾股定理知 $AC = \sqrt{13}$, 由射影定理得

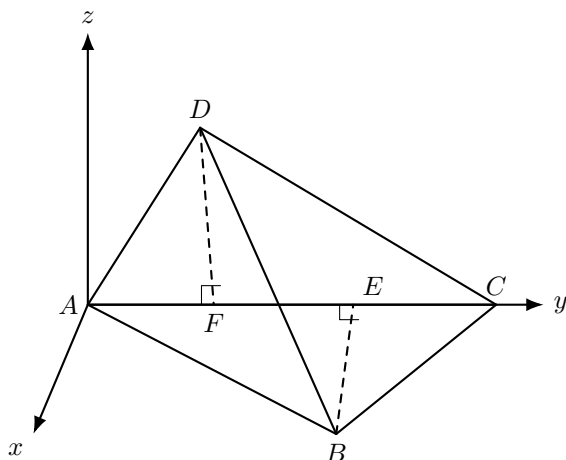
$$BE = DF = \frac{6}{13}\sqrt{13}, \quad AF = CE = \frac{4}{13}\sqrt{13}.$$

故 $EF = \frac{5}{13}\sqrt{13}$. 因此

$$\overrightarrow{DB} = \left(\frac{6}{13}\sqrt{13}, \frac{5}{13}\sqrt{13}, -\frac{6}{13}\sqrt{13} \right).$$

设直线 AC, BD 所成角为 α , 则

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5}{97}\sqrt{97}.$$



7. 设整数 $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_7 = 100$, 则

$$\sum_{i=1}^6 \left[\frac{a_{i+1}}{a_i} \right]$$

的最小可能值为_____.

注: $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

答案: 9.

解: 令

$$b_1 = \frac{a_2}{a_1}, \quad b_i = \left[\frac{a_{i+1}}{a_i} \right] + 1, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6,$$

这样

$$\prod_{i=1}^6 b_i > \prod_{i=1}^6 \frac{a_{i+1}}{a_i} = 100.$$

如果 $\sum_{i=1}^6 b_i \leq 13$, 那么 $b_1, b_2, \dots, b_6$ 的乘积的最大值在它们彼此的差均不超过 1 时取到, 即为

$$3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 96,$$

矛盾. 因此 $\sum_{i=1}^6 b_i \geq 14$, 故

$$\sum_{i=1}^6 \left\lceil \frac{a_{i+1}}{a_i} \right\rceil = \sum_{i=1}^6 b_i - 5 \geq 9.$$

另一方面, 当

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 8, a_4 = 15, a_5 = 29, a_6 = 57, a_7 = 100$$

时,

$$\sum_{i=1}^6 \left\lceil \frac{a_{i+1}}{a_i} \right\rceil = 9,$$

故所求最小可能值为 9.

8. 四个互不相等的复数 z_1, z_2, z_3, z_4 的实部和虚部都是非负整数, 且

$$|z_1 z_2 z_3 z_4| = \sqrt{2026},$$

则 $|z_1 + z_2 + z_3 + z_4| =$ _____.

答案: $\sqrt{1201}$.

解: 显然 z_1, z_2, z_3, z_4 的模长的平方都是正整数. 由于 $2026 = 2 \times 1013$ 且 1013 是素数, 结合最多有两个复数的模为 1 知 z_1, z_2, z_3, z_4 中有两个模长为 1, 剩余两个模长分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{1013}$. 满足题目条件且模长为 1 的复数仅有 1 和 i , 模长为 $\sqrt{2}$ 的复数仅有 $1+i$, 模长为 $\sqrt{1013}$ 的复数仅有 $22+23i$ 和 $23+22i$. 因此

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 + i + (1 + i) + (22 + 23i) = 24 + 25i$$

或

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1 + i + (1 + i) + (23 + 22i) = 25 + 24i.$$

无论哪种情况, 均有

$$|z_1 + z_2 + z_3 + z_4| = \sqrt{1201}.$$

9. 给定平面直角坐标系内三点

$$A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(2, \frac{3}{2}\right), C(2, -2).$$

过 A 作一条直线与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 交于两点 P, Q, 则

$$\frac{|BP|}{|CQ|}$$

的取值范围是_____.

答案: $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

解: 令 $O(0, 0), R(2, 0)$, 则

$$|OA| \cdot |AR| = 1 - |OA|^2 = |AP| \cdot |AQ|,$$

故 O, P, R, Q 共圆, 结合 $|OP| = |OQ|$ 知 $\angle ORP = \angle ORQ$. 因此 P 关于 x 轴的对称点 P' 在直线 RQ 上, 故

$$|RP| \cdot |RQ| = |RP'| \cdot |RQ| = |RO|^2 - 1 = 3.$$

注意 B, R, C 在同一条平行于 y 轴的直线上, 且按此顺序排列, 故 $\angle PRB = \angle QRC$, 结合

$$|RP| \cdot |RQ| = 3 = |RB| \cdot |RC|$$

知 $\triangle PRB \sim \triangle CRQ$, 因此

$$\frac{|BP|}{|CQ|} = \frac{|PR|}{|CR|} = \frac{|PR|}{2}.$$

又 $|PR|$ 的取值范围是 $[1, 3]$, 所以 $\frac{|BP|}{|CQ|}$ 的取值范围是

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

10. 设 H 是锐角三角形 ABC 的垂心, 三角形 ABH, BCH, CAH 的面积分别为 2, 3, 4, 则三角形 ABC 的外接圆的面积为_____.

答案: $\frac{35}{12}\sqrt{6}\pi$.

解: 设 AH, BC 交于 D, 则

$$\frac{\tan C}{\tan B} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{CD} = \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}} = \frac{1}{2},$$

同理

$$\frac{\tan C}{\tan A} = \frac{S_{ABH}}{S_{BCH}} = \frac{2}{3},$$

故可设 $\tan A = 3k, \tan B = 4k, \tan C = 2k$. 由熟知恒等式

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

得 $9k = 24k^3$, 故 $k = \frac{\sqrt{6}}{4}$. 因此

$$\tan A = \frac{3\sqrt{6}}{4}, \quad \sin A = \sqrt{\frac{27}{35}}.$$

同理可得

$$\sin B = \sqrt{\frac{6}{7}}, \quad \sin C = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

设 ABC 的外接圆半径为 R , 则

$$9 = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \sin A = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$

故

$$R^2 = \frac{35}{12}\sqrt{6},$$

因此外接圆面积为

$$\pi R^2 = \frac{35}{12}\sqrt{6}\pi.$$

2 解答题 (第 11, 12 题每题 20 分, 第 13, 14 题每题 40 分, 共 120 分)

11. 设

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1 + \sqrt{3a_n^2 - 6a_n + 4} \quad (n \geq 0),$$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解答: 将

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 + \sqrt{3a_n^2 - 6a_n + 4}$$

移项, 两边平方并整理得

$$a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 + 2a_{n+1} + 2a_n - 3 = 0. \quad \text{—— (5 分)}$$

同理有

$$a_{n-1}^2 - 4a_{n-1}a_n + a_n^2 + 2a_{n-1} + 2a_n - 3 = 0.$$

注意 $a_{n+1} > 2a_n - 1$, 由数学归纳法易知 $a_n \geq 1$, 所以 $a_{n+1} > a_n$. 因此对 $n \geq 1$,

$$a_{n+1} > a_{n-1},$$

故 a_{n+1} 与 a_{n-1} 是一元二次方程

$$x^2 - (4a_n - 2)x + (a_n^2 + 2a_n - 3) = 0$$

的两个根, 所以

$$a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n - 2. \quad \text{—— (10 分)}$$

令 $b_n = a_n - 1$, 则

$$b_{n+1} + b_{n-1} = 4b_n. \quad \text{—— (15 分)}$$

在条件中代入 $n = 0$ 得 $a_1 = 1 + \sqrt{1} = 2$, 因此 $b_0 = 0, b_1 = 1$, 由特征根法可得

$$b_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

所以

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} + 1. \quad \text{—— (20 分)}$$

12. 设 $ABCD$ 是一个凸四边形, 延长 DC, AB 交于点 E . 已知

$$BE = AB, \quad BD - AD = AC - BC = \frac{1}{2}AB, \quad CD = \sqrt{5}AB.$$

求 $\tan \angle AED$.

解答: 以 AB 中点 O 为原点, OE 方向为 x 轴正方向, $\frac{1}{4}AB$ 为单位长度建立平面直角坐标系, 则

$$A(-2, 0), \quad B(2, 0), \quad E(6, 0),$$

且 $BD - AD = AC - BC = 2$, 由双曲线的第二定义可知, C, D 两点均在双曲线

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$$

上.

—— (5 分) 设直线 CD 的方程为 $y = k(x - 6)$, 代入双曲线方程得

$$k^2(x - 6)^2 = 3(x^2 - 1),$$

因此 C, D 两点的横坐标 x_1, x_2 是方程

$$(k^2 - 3)x^2 - 12k^2x + (36k^2 + 3) = 0$$

的两个根.

—— (10 分)

由此可得

$$|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{105k^2 + 9}}{|k^2 - 3|}.$$

再由 $CD = \sqrt{5}AB = 4\sqrt{5}$ 知

$$|x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{k^2 + 1}},$$

所以

$$\frac{2\sqrt{105k^2 + 9}}{|k^2 - 3|} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

两边平方并去分母整理得

$$85k^4 + 234k^2 - 171 = 0. \quad \text{—— (15 分)}$$

解关于 k^2 的二次方程得到

$$k^2 = \frac{3}{5} \quad \text{或} \quad k^2 = -\frac{57}{17} \quad (\text{舍}).$$

而当 $k^2 = \frac{3}{5}$ 时, 以 x_1, x_2 为根的一元二次方程的二次项系数与常数项符号相反, 故 x_1, x_2 一正一负, 符合题意. 因此

$$\tan \angle AED = |k| = \frac{\sqrt{15}}{5}. \quad \text{—— (20 分)}$$

13.

(1) 证明: 对任意满足 $0 < b - a \leq 1$ 的实数 a, b , 开区间 (a, b) 内分母最小的分数是唯一的 (分母必须是正整数, 整数视为分母为 1 的分数);

(2) 设整数 $m \geq 2$, 实数 a, b 满足

$$\frac{1}{m(m+1)} < a < b < 1 - \frac{1}{m(m+1)}, \quad b - a > \frac{1}{m+1}.$$

证明: 开区间 (a, b) 内分母最小的分数的分母不超过 m .

解答:

(1) 易知 (a, b) 内有分数, 由最小数原理知存在分母最小的分数. 假设这样的分数不唯一, 设

$$a < \frac{u}{m} < \frac{v}{m} < b,$$

这里 m 是正整数, u, v 是整数, 且 $\frac{u}{m}, \frac{v}{m}$ 都是最简分数.

—— (10 分) 由

$$1 \geq b - a > \frac{v}{m} - \frac{u}{m} \geq \frac{u+1}{m} - \frac{u}{m} = \frac{1}{m}$$

知 $m \geq 2$. 注意

$$u(m-1), u(m-1)+1, \dots, (u+1)(m-1)$$

是连续 m 个整数, 其中必有 m 的倍数. 设

$$u(m-1) + r = ms \quad (r \in \{0, 1, \dots, m-1\}),$$

则

$$u(m-1) \leq ms \leq (u+1)(m-1),$$

故

$$\frac{u}{m} \leq \frac{s}{m-1} \leq \frac{u+1}{m}.$$

这说明 (a, b) 内有以 $m-1$ 为分母的分数, 与假设矛盾. 因此假设不成立, 原题结论得证.

—— (20 分)

(2) 注意到

$$\frac{1}{m(m+1)} < \frac{1}{m} < \frac{1}{m-1} < \frac{2}{m} < \frac{2}{m-1} < \cdots < \frac{m-2}{m} < \frac{m-2}{m-1} < \frac{m-1}{m} < 1 - \frac{1}{m(m+1)}$$

且

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} &= \left(1 - \frac{1}{m(m+1)}\right) - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m+1}, \\ \frac{k}{m-1} - \frac{k}{m} &= \frac{k}{m(m-1)} \leq \frac{m-2}{m(m-1)} < \frac{1}{m+1} \quad (k=1, 2, \dots, m-2), \\ \frac{k+1}{m} - \frac{k}{m-1} &= \frac{m-1-k}{m(m-1)} \leq \frac{m-2}{m(m-1)} < \frac{1}{m+1} \quad (k=1, 2, \dots, m-2). \end{aligned}$$

因此开区间 (a, b) 内必然包含

$$\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m-1}, \dots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-2}{m-1}, \frac{m-1}{m}$$

中的至少一个数, 所以开区间 (a, b) 内分母最小的分数的分母不超过 m .

—— (40 分)

14. 有 100 名乒乓球选手参加一次单打联赛, 每两人最多打一场, 每一场比赛都会分出胜负. 已知比赛结束后, 对任意四名两两比赛过的选手, 都可以从中选出三名选手, 使得这三名选手之间的比赛中, 每人都恰胜了一场. 求比赛场数的最大可能值.

解: 我们先证明, 不存在 8 名选手两两比赛过.

事实上, 如果有 8 名选手两两比赛过, 那么他们之间的比赛中, 必有一人胜利的场数不少于失败的场数, 设这名选手为 A_1 , 他至少胜了 4 场. 考虑 A_1 的 4 个手下败将彼此之间的比赛, 同理可知存在一名选手至少胜了 2 场, 设其为 A_2 , 并设 A_2 的 2 个手下败将是 A_3, A_4 . 这样 A_1, A_2, A_3, A_4 就不满足题目条件, 矛盾. 因此不存在 8 名选手两两比赛过.

—— (10 分)

由于

$$100 = 14 \times 7 + 2 = 15 \times 2 + 14 \times 5,$$

所以当比赛场数多于

$$C_{100}^2 - (2C_{15}^2 + 5C_{14}^2) = 4285$$

时, 由 Turan 定理, 必然存在 8 名选手两两比赛过, 矛盾. 因此比赛场数不可能超过 4285.

—— (20 分)

下面我们证明, 存在 7 名选手两两比赛的一种结果, 使得他们满足题述条件. 设 7 名选手为 $A_1, A_2, \dots, A_7$, 假设结果为

$$A_i \text{ 胜 } A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+4}, \quad \text{负 } A_{i+3}, A_{i+5}, A_{i+6}$$

(角标模 7 处理). 从中任选 4 名选手, 并假设其中任意 3 名选手之间的比赛都不是每人恰胜一场, 也就是有一人胜了另外两人. 考虑其中胜场最多的选手 X , 如果 X 不是全胜, 那么设 X 输给了 Y , 由 Y 的总胜场数小于等于 X 的总胜场数知存在另一名选手 Z 使得 X 胜 Z , Z 胜 Y , 但 X, Y, Z 之间的比赛每人恰胜一场, 矛盾. 因此存在一名选手赢了剩下 3 名选手. 由对称性不妨设这名选手是 A_1 , 那么剩余三人必为 A_2, A_3, A_5 , 但他们之间的比赛是每人各胜一场, 矛盾. 因此存在 7 名选手两两比赛的一种结果, 使得他们满足题述条件. —— (30 分)

现在, 将 100 名选手分成 7 组 $M_1, M_2, \dots, M_7$, 其中 2 组有 15 人, 其余 5 组有 14 人. 假设同组的选手之间没有比赛, 而 M_i 组里的每名选手都赢了

$$M_{i+1}, M_{i+2}, M_{i+4}$$

组里的所有选手, 输给了

$$M_{i+3}, M_{i+5}, M_{i+6}$$

组里的所有选手 (角标模 7 处理). 这样任选 4 名两两比赛过的选手, 他们必然属于 4 个不同的组, 再由前面的分析可知这样的比赛结果满足题述条件, 而比赛场数恰为 4285.

—— (40 分)

综上所述, 比赛场数的最大值为 4285.