2026 广东预赛
参考答案与评分标准

1　填空题（每小题 8 分，共 80 分）

1. 设

$$S=\{a:a^2<2026\},\qquad T=\{a:\text{关于}x\text{ 的一元二次方程}x^2-4x+a=0\text{ 有整数根}\}.$$

则 $S\cap T$ 的元素个数为_____.

答案：8.

解：显然 T 的元素都是整数，而 S 中的整数元素仅有 $-45,-44,\ldots,45$，故只需考虑这些数中有哪些满足 T 的条件.

设 $x^2-4x+a=0$ 的一个整数根是 x_0，则

$$a=4x_0-x_0^2=4-(2-x_0)^2,$$

故 a 形如 $4-d^2$，这里 d 是整数，不妨设 d 非负. 由 $-45\le 4-d^2\le 45$ 知 $0\le d\le 7$，故共有 8 个 d，因此共有 8 个 a.

2. 已知

$$\log_2 x=\log_3 y=\log_5\sqrt{x^2+y^2},$$

则 $xy=$_____.

答案：$\sqrt{6}$.

解：设 $\log_2 x=a$，则 $x=2^a,y=3^a,\sqrt{x^2+y^2}=5^a$，故

$$2^{2a}+3^{2a}=5^{2a},$$

因此

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2a}+\left(\frac{3}{5}\right)^{2a}=1.$$

由 $f(t)=\left(\frac{2}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t$ 关于 t 单调递减及 $f(1)=1$ 知 $2a=1$. 故 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{3}$，因此 $xy=\sqrt{6}$.

3. 有 24 名小朋友排成一圈，现在要将小朋友们两两配对，一共配成 12 对，并要求任意两名配对的小朋友之间恰好隔了 3 名小朋友，则共有_____ 种配对的方法.

答案：16

解：将小朋友们顺次编号为 $1,2,\ldots,24$，则配对的小朋友编号之差为 4（模 24 意义下），将编号按照除以 4 的余数分组，每一组（例如，$1,5,9,13,17,21$ 号小朋友）只能在他们内部配对，共有 2 种配对方式

$$1-5,\ 9-13,\ 17-21\quad\text{或}\quad 1-21,\ 5-9,\ 13-17,$$

故配对的方法共有 $2^4=16$ 种.

4. 在平面直角坐标系中，点 $A(-3,0),B(3,0)$，动点 M 满足 $|MA|\cdot|MB|=6$，则 M 的纵坐标的最大值为_____.

答案：1.

解：设 $M(x,y)$，由条件得

$$\big((x-3)^2+y^2\big)\big((x+3)^2+y^2\big)=36,$$

整理得

$$y^4+(2x^2+18)y^2+(x^4-18x^2+45)=0,$$

故

$$(x^2+y^2)^2+18(y^2-x^2)+45=0.$$

设 $x^2+y^2=t$，则

$$y^2-x^2=-\frac{t^2+45}{18},$$

故

$$y^2=\frac{-t^2+18t-45}{36}=1-\frac{(t-9)^2}{36}\le 1.$$

因此 $y\le 1$. 取等时 $t=9,x^2=8$，即 $M(2\sqrt{2},1)$ 或 $M(-2\sqrt{2},1)$.

5. 若存在 $n+1$ 个实数 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 同时满足

$$(1)\quad a_0=-2026a_1;$$

$$(2)\quad \text{对}k=1,2,\ldots,n-1,\ \text{有}\quad a_{k+1}=\frac{a_k^2}{2a_k+a_{k-1}}.$$

则正整数 n 的最大值是_____.
答案：1013.
解：由（2）得

$$\frac{a_k}{a_{k+1}}=\frac{a_{k-1}}{a_k}+2.$$

设 $b_k=\dfrac{a_{k-1}}{a_k}$，则 $\{b_k\}$ 是以 -2026 为首项，2 为公差的等差数列. 如果 $n\geq 1014$，那么 $b_{1014}=0$，故 $a_{1013}=0$，结合前面条件知

$$a_{1012}=a_{1011}=\cdots=a_0=0,$$

但 $2a_1+a_0=0$ 不能作分母，与条件矛盾. 另一方面，令

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{1}{2026}a_0,\quad a_2=-\frac{1}{2024}a_1,\quad \ldots,\quad a_{1013}=-\frac{1}{2}a_{1012},$$

符合题目条件. 因此 n 的最大值是 1013.

6. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3,BC=2$. 将 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起后形成三棱锥 $D-ABC$. 当三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大时，直线 AC,BD 所成角的余弦值为_____.
答案：$\dfrac{5}{97}\sqrt{97}$.
解：三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大时，点 D 到面 ABC 的距离最大，故点 D 到面 ABC 的垂足在直线 AC 上，即面 ADC 与面 ABC 垂直. 如下图建立空间直角坐标系，由勾股定理知 $AC=\sqrt{13}$，由射影定理得

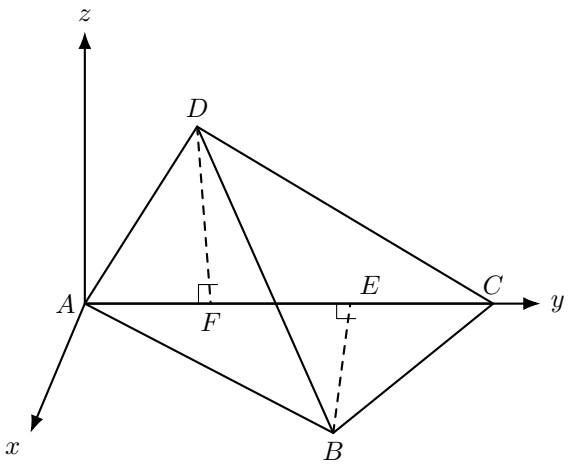
$$BE=DF=\frac{6}{13}\sqrt{13},\qquad AF=CE=\frac{4}{13}\sqrt{13}.$$

故 $EF=\frac{5}{13}\sqrt{13}$. 因此

$$\overrightarrow{DB}=\left(\frac{6}{13}\sqrt{13},\frac{5}{13}\sqrt{13},-\frac{6}{13}\sqrt{13}\right).$$

设直线 AC,BD 所成角为 α，则

$$\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{DB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{5}{97}\sqrt{97}.$$



7. 设整数 $1=a_1<a_2<\cdots<a_7=100$，则

$$\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{a_{i+1}}{a_i}\right]$$

的最小可能值为_____.
注：$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.
答案：9.
解：令

$$b_1=\frac{a_2}{a_1},\qquad b_i=\left[\frac{a_{i+1}}{a_i}\right]+1,\quad i=2,3,4,5,6,$$

这样

$$\prod_{i=1}^{6}b_i>\prod_{i=1}^{6}\frac{a_{i+1}}{a_i}=100.$$

如果 $\sum_{i=1}^{6}b_i\leq 13$，那么 $b_1,b_2,\ldots,b_6$ 的乘积的最大值在它们彼此的差均不超过 1 时取到，即为

$$3\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2=96,$$

矛盾. 因此 $\sum_{i=1}^{6} b_i \geq 14$，故

$$\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{a_{i+1}}{a_i}\right]=\sum_{i=1}^{6} b_i-5 \geq 9.$$

另一方面，当

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=8,\ a_4=15,\ a_5=29,\ a_6=57,\ a_7=100$$

时，

$$\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{a_{i+1}}{a_i}\right]=9,$$

故所求最小可能值为 9.

8. 四个互不相等的复数 z_1, z_2, z_3, z_4 的实部和虚部都是非负整数，且

$$|z_1 z_2 z_3 z_4|=\sqrt{2026},$$

则 $|z_1+z_2+z_3+z_4|=$ _____.
答案：$\sqrt{1201}$.
解：显然 z_1, z_2, z_3, z_4 的模长的平方都是正整数. 由于 $2026=2\times 1013$ 且 1013 是素数，结合最多有两个复数的模为 1 知 z_1, z_2, z_3, z_4 中有两个模长为 1，剩余两个模长分别为 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{1013}$. 满足题目条件且模长为 1 的复数仅有 1 和 i，模长为 $\sqrt{2}$ 的复数仅有 $1+i$，模长为 $\sqrt{1013}$ 的复数仅有 $22+23i$ 和 $23+22i$. 因此

$$z_1+z_2+z_3+z_4=1+i+(1+i)+(22+23i)=24+25i$$

或

$$z_1+z_2+z_3+z_4=1+i+(1+i)+(23+22i)=25+24i.$$

无论哪种情况，均有

$$|z_1+z_2+z_3+z_4|=\sqrt{1201}.$$

9. 给定平面直角坐标系内三点

$$A\left(\frac{1}{2},0\right),\quad B\left(2,\frac{3}{2}\right),\quad C(2,-2).$$

过 A 作一条直线与圆 $x^2+y^2=1$ 交于两点 P, Q，则

$$\frac{|BP|}{|CQ|}$$

的取值范围是_____.
答案：$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.
解：令 $O(0,0), R(2,0)$，则

$$|OA|\cdot|AR|=1-|OA|^2=|AP|\cdot|AQ|,$$

故 O, P, R, Q 共圆，结合 $|OP|=|OQ|$ 知 $\angle ORP=\angle ORQ$. 因此 P 关于 x 轴的对称点 P' 在直线 RQ 上，故

$$|RP|\cdot|RQ|=|RP'|\cdot|RQ|=|RO|^2-1=3.$$

注意 B, R, C 在同一条平行于 y 轴的直线上，且按此顺序排列，故 $\angle PRB=\angle QRC$，结合

$$|RP|\cdot|RQ|=3=|RB|\cdot|RC|$$

知 $\triangle PRB\sim\triangle CRQ$，因此

$$\frac{|BP|}{|CQ|}=\frac{|PR|}{|CR|}=\frac{|PR|}{2}.$$

又 $|PR|$ 的取值范围是 $[1,3]$，所以 $\dfrac{|BP|}{|CQ|}$ 的取值范围是

$$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right].$$

10. 设 H 是锐角三角形 ABC 的垂心，三角形 ABH, BCH, CAH 的面积分别为 $2, 3, 4$，则三角形 ABC 的外接圆的面积为_____.
答案：$\frac{35}{12}\sqrt{6}\pi$.
解：设 AH, BC 交于 D，则

$$\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{BD}{AD}\cdot\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{CD}=\frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{1}{2},$$

同理

$$\frac{\tan C}{\tan A}=\frac{S_{ABH}}{S_{BCH}}=\frac{2}{3},$$

故可设 $\tan A=3k,\tan B=4k,\tan C=2k$. 由熟知恒等式

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

得 $9k=24k^3$，故 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. 因此

$$\tan A=\frac{3\sqrt{6}}{4},\qquad \sin A=\sqrt{\frac{27}{35}}.$$

同理可得

$$\sin B=\sqrt{\frac{6}{7}},\qquad \sin C=\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

设 ABC 的外接圆半径为 R，则

$$9=S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C,$$

故

$$R^2=\frac{35}{12}\sqrt{6},$$

因此外接圆面积为

$$\pi R^2=\frac{35}{12}\sqrt{6}\pi.$$

2 解答题（第 11，12 题每题 20 分，第 13，14 题每题 40 分，共 120 分）

11. 设

$$a_0=1,\qquad a_{n+1}=2a_n-1+\sqrt{3a_n^2-6a_n+4}\quad(n\geq 0),$$

求 $\{a_n\}$ 的通项公式.
解答：将

$$a_{n+1}=2a_n-1+\sqrt{3a_n^2-6a_n+4}$$

移项，两边平方并整理得

$$a_{n+1}^2-4a_{n+1}a_n+a_n^2+2a_{n+1}+2a_n-3=0.\quad\text{——（5 分）}$$

同理有

$$a_{n-1}^2-4a_{n-1}a_n+a_n^2+2a_{n-1}+2a_n-3=0.$$

注意 $a_{n+1}>2a_n-1$，由数学归纳法易知 $a_n\geq 1$，所以 $a_{n+1}>a_n$. 因此对 $n\geq 1$，

$$a_{n+1}>a_{n-1},$$

故 a_{n+1} 与 a_{n-1} 是一元二次方程

$$x^2-(4a_n-2)x+(a_n^2+2a_n-3)=0$$

的两个根，所以

$$a_{n+1}+a_{n-1}=4a_n-2.\quad\text{——（10 分）}$$

令 $b_n=a_n-1$，则

$$b_{n+1}+b_{n-1}=4b_n.\quad\text{——（15 分）}$$

在条件中代入 $n=0$ 得 $a_1=1+\sqrt{1}=2$，因此 $b_0=0,b_1=1$，由特征根法可得

$$b_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

所以

$$a_n=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}+1.\quad\text{——（20 分）}$$

12. 设 $ABCD$ 是一个凸四边形，延长 DC,AB 交于点 E. 已知

$$BE=AB,\qquad BD-AD=AC-BC=\frac{1}{2}AB,\qquad CD=\sqrt{5}\,AB.$$

求 $\tan\angle AED$.

解答：以 AB 中点 O 为原点，OE 方向为 x 轴正方向，$\dfrac{1}{4}AB$ 为单位长度建立平面直角坐标系，则

$$A(-2,0),\quad B(2,0),\quad E(6,0),$$

且 $BD-AD=AC-BC=2$，由双曲线的第二定义可知，C,D 两点均在双曲线

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1$$

上. ——（5 分）设直线 CD 的方程为 $y=k(x-6)$，代入双曲线方程得

$$k^2(x-6)^2=3(x^2-1),$$

因此 C,D 两点的横坐标 x_1,x_2 是方程

$$(k^2-3)x^2-12k^2x+(36k^2+3)=0$$

的两个根. ——（10 分）

由此可得

$$|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{105k^2+9}}{|k^2-3|}.$$

再由 $CD=\sqrt{5}\,AB=4\sqrt{5}$ 知

$$|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{k^2+1}},$$

所以

$$\frac{2\sqrt{105k^2+9}}{|k^2-3|}=\frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{k^2+1}}.$$

两边平方并去分母整理得

$$85k^4+234k^2-171=0.\quad \text{——（15 分）}$$

解关于 k^2 的二次方程得到

$$k^2=\frac{3}{5}\quad 或\quad k^2=-\frac{57}{17}\quad (舍).$$

而当 $k^2=\dfrac{3}{5}$ 时，以 x_1,x_2 为根的一元二次方程的二次项系数与常数项符号相反，故 x_1,x_2 一正一负，符合题意. 因此

$$\tan\angle AED=|k|=\frac{\sqrt{15}}{5}.\quad \text{——（20 分）}$$

13.

(1) 证明：对任意满足 $0<b-a\le 1$ 的实数 a,b，开区间 (a,b) 内分母最小的分数是唯一的（分母必须是正整数，整数视为分母为 1 的分数）；

(2) 设整数 $m\ge 2$，实数 a,b 满足

$$\frac{1}{m(m+1)}<a<b<1-\frac{1}{m(m+1)},\qquad b-a>\frac{1}{m+1}.$$

证明：开区间 (a,b) 内分母最小的分数的分母不超过 m.

解答：

(1) 易知 (a,b) 内有分数，由最小数原理知存在分母最小的分数. 假设这样的分数不唯一，设

$$a<\frac{u}{m}<\frac{v}{m}<b,$$

这里 m 是正整数，u,v 是整数，且 $\dfrac{u}{m},\dfrac{v}{m}$ 都是最简分数. ——（10 分）由

$$1\ge b-a>\frac{v}{m}-\frac{u}{m}\ge\frac{u+1}{m}-\frac{u}{m}=\frac{1}{m}$$

知 $m\ge 2$. 注意

$$u(m-1),u(m-1)+1,\ldots,(u+1)(m-1)$$

是连续 m 个整数，其中必有 m 的倍数. 设

$$u(m-1)+r=ms\qquad (r\in\{0,1,\ldots,m-1\}),$$

则

$$u(m-1)\le ms\le(u+1)(m-1),$$

故

$$\frac{u}{m} \le \frac{s}{m-1} \le \frac{u+1}{m}.$$

这说明 (a,b) 内有以 $m-1$ 为分母的分数，与假设矛盾. 因此假设不成立，原题结论得证. ——（20 分）

（2）注意到

$$\frac{1}{m(m+1)} < \frac{1}{m} < \frac{1}{m-1} < \frac{2}{m} < \frac{2}{m-1} < \cdots < \frac{m-2}{m} < \frac{m-2}{m-1} < \frac{m-1}{m} < 1 - \frac{1}{m(m+1)}$$

且

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} = \left(1 - \frac{1}{m(m+1)}\right) - \frac{m-1}{m} = \frac{1}{m+1},$$

$$\frac{k}{m-1} - \frac{k}{m} = \frac{k}{m(m-1)} \le \frac{m-2}{m(m-1)} < \frac{1}{m+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, m-2),$$

$$\frac{k+1}{m} - \frac{k}{m-1} = \frac{m-1-k}{m(m-1)} \le \frac{m-2}{m(m-1)} < \frac{1}{m+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, m-2).$$

因此开区间 (a,b) 内必然包含

$$\frac{1}{m}, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m-1}, \ldots, \frac{m-2}{m}, \frac{m-2}{m-1}, \frac{m-1}{m}$$

中的至少一个数，所以开区间 (a,b) 内分母最小的分数的分母不超过 m. ——（40 分）

14. 有 100 名乒乓球选手参加一次单打联赛，每两人最多打一场，每一场比赛都会分出胜负. 已知比赛结束后，对任意四名两两比赛过的选手，都可以从中选出三名选手，使得这三名选手之间的比赛中，每人都恰胜了一场. 求比赛场数的最大可能值.

解：我们先证明，不存在 8 名选手两两比赛过.

事实上，如果有 8 名选手两两比赛过，那么他们之间的比赛中，必有一人胜利的场数不少于失败的场数，设这名选手为 A_1，他至少胜了 4 场. 考虑 A_1 的 4 个手下败将彼此之间的比赛，同理可知存在一名选手至少胜了 2 场，设其为 A_2，并设 A_2 的 2 个手下败将是 A_3, A_4. 这样 A_1, A_2, A_3, A_4 就不满足题目条件，矛盾. 因此不存在 8 名选手两两比赛过. ——（10 分）

由于

$$100 = 14 \times 7 + 2 = 15 \times 2 + 14 \times 5,$$

所以当比赛场数多于

$$C_{100}^2 - \left(2C_{15}^2 + 5C_{14}^2\right) = 4285$$

时，由 Turan 定理，必然存在 8 名选手两两比赛过，矛盾. 因此比赛场数不可能超过 4285. ——（20 分）

下面我们证明，存在 7 名选手两两比赛的一种结果，使得他们满足题述条件. 设 7 名选手为 $A_1, A_2, \ldots, A_7$，假设结果为

$$A_i \text{ 胜} A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+4}, \qquad \text{负} A_{i+3}, A_{i+5}, A_{i+6}$$

（角标模 7 处理）. 从中任选 4 名选手，并假设其中任意 3 名选手之间的比赛都不是每人恰胜一场，也就是有一人胜了另外两人. 考虑其中胜场最多的选手 X，如果 X 不是全胜，那么设 X 输给了 Y，由 Y 的总胜场数小于等于 X 的总胜场数知存在另一名选手 Z 使得 X 胜 Z，Z 胜 Y，但 X, Y, Z 之间的比赛每人恰胜一场，矛盾. 因此存在一名选手赢了剩下 3 名选手. 由对称性不妨设这名选手是 A_1，那么剩余三人必为 A_2, A_3, A_5，但他们之间的比赛是每人各胜一场，矛盾. 因此存在 7 名选手两两比赛的一种结果，使得他们满足题述条件. ——（30 分）

现在，将 100 名选手分成 7 组 $M_1, M_2, \ldots, M_7$，其中 2 组有 15 人，其余 5 组有 14 人. 假设同组的选手之间没有比赛，而 M_i 组里的每名选手都赢了

$$M_{i+1}, M_{i+2}, M_{i+4}$$

组里的所有选手，输给了

$$M_{i+3}, M_{i+5}, M_{i+6}$$

组里的所有选手（角标模 7 处理）. 这样任选 4 名两两比赛过的选手，他们必然属于 4 个不同的组，再由前面的分析可知这样的比赛结果满足题述条件，而比赛场数恰为 4285. ——（40 分）

综上所述，比赛场数的最大值为 4285.