2026 年广东高联预赛加试题：分析与解答

LeyuDame

2026 年 11 月 3 日

摘要

本文整理 2026 年全国中学生数学奥林匹克竞赛广东省赛区初赛加试的两道解答题. 第一题的核心是“区间内最小分母分数”的唯一性，以及 Farey 分数间隙的长度估计. 第二题把乒乓球比赛翻译成有向图问题：题设要求每个完全四人组不能形成传递锦标赛. 两题共同的思路是先找出隐藏的极小结构，再用间隙或 Turan 型极值给出上界，并构造达到上界的例子.

1 题目

一

(1) 证明：对任意满足 $0 < b - a \le 1$ 的实数 a, b，开区间 (a, b) 内分母最小的分数是唯一的（分母必须是正整数，整数视为分母为 1 的分数）.

(2) 设整数 $m \ge 2$，实数 a, b 满足

$$\frac{1}{m(m+1)} < a < b < 1 - \frac{1}{m(m+1)}, \qquad b - a > \frac{1}{m+1}.$$

证明：开区间 (a, b) 内分母最小的分数的分母不超过 m.

二

有 100 名乒乓球选手参加一次单打联赛，每两人最多打一场，每一场比赛都会分出胜负. 已知比赛结束后，对任意四名两两比赛过的选手，都可以从中选出三名选手，使得这三名选手之间的比赛中，每人都恰胜了一场. 求比赛场数的最大可能值.

2 第一题分析

第一问的直觉是：如果一个长度不超过 1 的开区间里出现了两个“同样简单”的分数，那么这两个分数之间还应当有更简单的分数. 真正需要证明的是下面这个小引理. 它避免直接调用连分数，也把“为什么最小分母会唯一”说清楚.

引理 1 (两个同分母分数之间有更低分母)**.** 设 $n \ge 2$, 整数 $u < v$, 且 $\gcd(u, n) = \gcd(v, n) = 1$. 若 $0 < v - u < n$, 则开区间

$$\left(\frac{u}{n}, \frac{v}{n}\right)$$

中存在一个分母小于 n 的分数.

证明. 记 $d = v - u$，于是 $1 \le d < n$.

若 $d \ge 2$，取

$$q = \left\lceil \frac{n}{d} \right\rceil .$$

因为 $d \geq 2$ 且 $d < n$，所以 $1 \leq q < n$. 区间

$$\left(\frac{qu}{n}, \frac{qv}{n}\right)$$

的长度为 $qd/n \geq 1$. 若长度大于 1，其中当然有整数 p. 若长度等于 1，则 $d \mid n$、$q = n/d$，而 $\gcd(u, n) = 1$ 推出 $d \nmid u$，所以左端点 $qu/n = u/d$ 不是整数；一个长度为 1 且端点非整数的开区间中仍含有整数. 因此总能取到整数 p，使得

$$\frac{qu}{n} < p < \frac{qv}{n}.$$

于是

$$\frac{u}{n} < \frac{p}{q} < \frac{v}{n},$$

且 $q < n$.

若 $d = 1$，即 $v = u + 1$. 由于 $\gcd(v, n) = 1$，存在整数 q，满足 $1 \leq q < n$ 且

$$qv \equiv 1 \pmod{n}.$$

此时 $q \neq 1$. 否则 $v \equiv 1 \pmod{n}$，从而 $u \equiv 0 \pmod{n}$，与 $\gcd(u, n) = 1$ 矛盾. 令

$$p = \frac{qv - 1}{n},$$

则 p 是整数，并且

$$\frac{qu}{n} = \frac{q(v-1)}{n} = p + \frac{1-q}{n} < p < \frac{qv}{n}.$$

故 $u/n < p/q < v/n$，且 $q < n$. □

第一问解答

由于任意开区间中都有有理数，所以 (a, b) 中一定存在分数. 取其中分母最小的分数，设最小分母为 n.

若 $n = 1$，则这些分数是整数. 两个不同整数的距离至少为 1，而开区间内任意两点的距离严格小于区间长度 $b - a \leq 1$，故不可能有两个分母为 1 的分数.

若 $n \geq 2$，假设存在两个分母同为 n 的分数

$$\frac{u}{n} < \frac{v}{n}$$

都落在 (a, b) 中，并且都已经约成最简分数. 因为它们都在开区间内，

$$\frac{v-u}{n} < b - a \leq 1,$$

所以 $0 < v - u < n$. 由上面的引理，在 $(u/n, v/n)$ 中存在一个分母小于 n 的分数. 它当然也在 (a, b) 中，这与 n 是最小分母矛盾.

因此 (a, b) 内分母最小的分数只能有一个.

第二问解答

这一问要证明的不是“某个具体分数在区间里”，而是“只要区间足够长并且不贴近 $0, 1$，就必定碰到分母不超过 m 的分数”. 最合适的语言是 Farey 序列.

记 $\mathcal{F}_m$ 为 $[0, 1]$ 中所有分母不超过 m 的最简分数按大小排列所得的序列. 我们使用如下标准性质：若

$$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

是 $\mathcal{F}_m$ 中相邻的两项，则

$$rq - ps = 1, \qquad q + s > m,$$

从而相邻两项之间的距离为

$$\frac{r}{s} - \frac{p}{q} = \frac{1}{qs}.$$

假设 (a,b) 中没有分母不超过 m 的分数. 由于

$$0 < a < b < 1,$$

区间 (a,b) 必定完全落在 $\mathcal{F}_m$ 的某两个相邻项之间.

先看内部间隙. 若这两个相邻项的分母 q,s 都至少为 2，则

$$qs \geq q + s > m,$$

所以 $qs \geq m+1$，该间隙长度

$$\frac{1}{qs} \leq \frac{1}{m+1}.$$

于是落在这个间隙里的任何开区间长度都不可能大于 $1/(m+1)$.

剩下只可能是靠近 0 或 1 的边缘间隙. 左端第一个间隙是

$$\left(0, \frac{1}{m}\right),$$

但题设给出

$$a > \frac{1}{m(m+1)}.$$

因此 (a,b) 若完全落在左端间隙中，则

$$b - a < \frac{1}{m} - \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m+1},$$

与题设矛盾. 右端间隙

$$\left(\frac{m-1}{m}, 1\right)$$

同理，由

$$b < 1 - \frac{1}{m(m+1)}$$

也推出可容纳的长度严格小于 $1/(m+1)$.

故 (a,b) 中必定存在分母不超过 m 的分数. 于是其中分母最小的分数的分母也不超过 m.

3 第二题分析

把每名选手看成一个顶点，把一场比赛看成一条有方向的边，方向从胜者指向负者. 若四名选手两两比赛过，它们构成一个有向完全图，也就是一个 4 人锦标赛.

三名选手之间“每人都恰胜一场”，等价于这三人形成一个有向三环. 因此题设等价于:

任意一个 4 人完全比赛组中，都必须含有有向三环.

而一个 4 人锦标赛若不含有向三环，就一定是传递的: 可以把四人按强弱排成一列，前者战胜后者. 所以题设也可以说成: 不存在一个四人组，其六场比赛全部存在且方向形成传递锦标赛.

引理 2. 任意 8 个顶点的锦标赛中，都含有一个传递的 4 顶点子锦标赛.

证明. 任取一个顶点 x. 在其余 7 个顶点中，至少有 4 个都被 x 战胜，或至少有 4 个都战胜 x.

先设 x 战胜某个 4 点集合 S 中的所有顶点. 任意 4 点锦标赛中都含有一个传递三角形: 取出度至少为 2 的顶点 y，再取它战胜的两个顶点 z,w，由 z,w 之间的胜负关系可得 y,z,w 形成传递三角形. 于是 S 中有一个传递三角形，加上顶点 x，就得到一个传递的 4 点锦标赛.

若有 4 个顶点都战胜 x，则同理先在这 4 个顶点中取传递三角形，再把 x 放在最后，也得到传递的 4 点锦标赛. □

上界

设比赛总图的无向底图为 G. 如果 G 中含有一个 K_8，也就是存在 8 名选手两两都比赛过，那么这 8 人的比赛方向构成一个 8 点锦标赛. 由上面的引理，其中含有一个传递的 4 点子锦标赛.

这四名选手两两比赛过，但由于它们的方向是传递的，所以其中任意三人都不是有向三环，无法做到“三人每人恰胜一场”. 这与题设矛盾.

因此 G 必须是不含 K_8 的图. 由 Turan 定理，100 个顶点的不含 K_8 的简单图边数至多为完全 7 部图的边数. 把 100 尽量平均分成 7 份:

$$100 = 15 + 15 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14.$$

于是边数上界为

$$\begin{aligned}\binom{100}{2} - 2\binom{15}{2} - 5\binom{14}{2} &= 4950 - 2 \cdot 105 - 5 \cdot 91 \\ &= 4285.\end{aligned}$$

构造

下面说明 4285 场可以达到.

把 100 名选手分成 7 组，其中两组各 15 人，另外五组各 14 人. 同组之间不比赛，异组之间全部比赛. 这样比赛场数正好是完全 7 部图的边数，即 4285 场.

现在只需安排胜负方向. 把七个组标号为 $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. 若

$$j - i \pmod 7 \in \{1, 2, 4\},$$

则规定第 i 组的所有选手战胜第 j 组的所有选手；否则反向.

这个 7 组之间的方向是一个没有传递四元组的锦标赛. 理由如下：每个组恰好战胜三个组. 例如第 0 组战胜 $1, 2, 4$ 组，而在 $1, 2, 4$ 三组之间有

$$1 \to 2, \qquad 2 \to 4, \qquad 4 \to 1,$$

形成有向三环. 由模 7 平移，对每个组都成立. 因此若四个组形成传递锦标赛，其最强的那个组应战胜另外三个组，但这三个被它战胜的组本身形成有向三环，不可能是传递三角形，矛盾.

在这个构造中，任意四名两两比赛过的选手必来自四个不同组. 对应的四个组不可能传递，所以其中必有一个有向三环. 取这个有向三环对应的三名选手，它们之间每人恰胜一场.

因此比赛场数的最大可能值为

$$4285.$$

4 方法小结

第一题的核心是“最小分母”与“相邻间隙”的关系：如果两个同分母最简分数靠得不够远，它们之间就会出现更低分母的分数；而 Farey 序列把所有低分母分数造成的间隙精确列出.

第二题的核心是先把文字条件翻译成有向图语言. 条件排除了传递的 K_4，而 8 点锦标赛必含传递 K_4，所以无向底图必须无 K_8. 上界来自 Turan 定理，构造来自没有传递四元组的 7 点锦标赛.

参考资料

1. 2026 年全国中学生数学奥林匹克竞赛广东省赛区初赛加试试卷，题面截图.

2. G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Farey sequences.

3. P. Turan, On an extremal problem in graph theory, 1941.